Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos x)^n \,\mathrm{d}x$.

1. $I_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos x)^0 \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} 1 \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x \,\mathrm{d}x = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$ et
$I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2x)}{2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sin(2\pi/2) - \sin 0}{4} = \frac{\pi}{4}$.

2. (a) Soit $n \in \mathbf{N}$. La fonction $x \mapsto (\cos x)^n$ est continue, positive et non identiquement nulle sur $[0, \pi/2]$. Cela entraîne que $I_n > 0$ (cf exercice 2).
   (b) Soit $n \in \mathbf{N}$. Pour tout $x \in [0, \pi/2]$, $0 \leqslant \cos x \leqslant 1$, donc $(\cos x)^{n+1} \leqslant (\cos x)^n$. Par monotonie de l'intégrale, on en déduit que $I_{n+1} \leqslant I_n$. La suite (I_n) est donc décroissante.
   (c) La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente. De plus sa limite ℓ vérifie $0 \leqslant \ell \leqslant I_1$, d'où $\ell \in [0, 1]$.

3. (a) Soit $n \in \mathbf{N}$. Intégrons par parties I_{n+2} en posant $u(x) = (\cos x)^{n+1}$ et $v(x) = \sin x$:

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} (\cos x)^{n+1} \cos x \,\mathrm{d}x = \Big[(\cos x)^{n+1} \sin x\Big]_0^{\pi/2} + (n+1) \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n \sin^2 x \,\mathrm{d}x \\
&= (n+1) \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n (1 - \cos^2 x) \,\mathrm{d}x = (n+1) \left(\int_0^{\pi/2} (\cos x)^n \,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi/2} (\cos x)^{n+2} \,\mathrm{d}x \right) \\
&= (n+1) I_n - (n+1) I_{n+2}.
\end{aligned}$$

   D'où, $(n+2) I_{n+2} = (n+1) I_n$.
   (b) Montrons cette proposition par récurrence.
   Initialisation : pour $n = 0$, on a $(n+1) I_{n+1} I_n = I_1 I_0 = 1 \times \pi/2 = \pi/2$.
   Hérédité : soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons que $(n+1) I_{n+1} I_n = \pi/2$. Alors, par la question précédente, puis l'hypothèse de récurrence, on a

$$((n+1)+1) I_{(n+1)+1} I_{n+1} = (n+2) I_{n+2} I_{n+1} = (n+1) I_n I_{n+1} = (n+1) I_{n+1} I_n = \pi/2.$$

   (c) Montrons maintenant que $\ell = 0$ par l'absurde : supposons $\ell \neq 0$. Alors, comme les suites (I_n) et (I_{n+1}) convergent toutes deux vers ℓ, la suite $\big((n+1) I_{n+1} I_n\big)$ diverge, ce qui contredit le résultat précédent.

4. (a) Comme la suite (I_n) est une suite décroissante de termes strictement positifs, on a pour tout $n \in \mathbf{N}$, $I_{n+2}/I_n \leqslant I_{n+1}/I_n \leqslant 1$. Par 3(a), ces inégalités sont équivalentes à

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1.$$

   La suite $((n+1)/(n+2))$ tend vers 1, c'est donc également le cas de (I_{n+1}/I_n).
   (b) Par la question précédente, $I_n \sim I_{n+1}$ et donc $n(I_n)^2 \sim (n+1) I_{n+1} I_n$. Par 3(b), cela signifie que la suite $\big(n(I_n)^2\big)$ converge vers $\pi/2$.

5. (a) Soit $\varepsilon \in]0, \pi/2[$ et $n \in \mathbf{N}$.
      i. Pour tout $x \in [0, \varepsilon]$, $0 \leqslant (\cos x)^n \leqslant 1$, donc $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{\varepsilon} (\cos x)^n \,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\varepsilon} 1 \,\mathrm{d}x = \varepsilon$.
      ii. La décroissance du cosinus sur $[\varepsilon, \pi/2]$ entraîne que pour tout $x \in [\varepsilon, \pi/2]$, $0 \leqslant \cos x \leqslant \cos\varepsilon$. Ainsi, pour tout $x \in [\varepsilon, \pi/2]$, $0 \leqslant (\cos x)^n \leqslant (\cos\varepsilon)^n$, et donc

$$0 \leqslant \int_{\varepsilon}^{\pi/2} (\cos x)^n \,\mathrm{d}x \leqslant \int_{\varepsilon}^{\pi/2} (\cos\varepsilon)^n \,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi}{2} (\cos\varepsilon)^n.$$

   (b) Soit $\varepsilon \in]0, \pi/2[$. Alors $0 \leqslant \cos\varepsilon < 1$ et la suite $\left(\dfrac{\pi}{2}(\cos\varepsilon)^n\right)$ converge vers 0. Il existe donc un entier $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $\dfrac{\pi}{2}(\cos\varepsilon)^n \leqslant \varepsilon$. On obtient ainsi, en utilisant la question précédente, que

$$\forall n \geqslant N,\ 0 \leqslant I_n = \int_0^{\varepsilon} (\cos x)^n \,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{\pi/2} (\cos x)^n \,\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon + \frac{\pi}{2}(\cos\varepsilon)^n \leqslant 2\varepsilon.$$

   On a donc montré que $\forall \varepsilon \in]0, \pi/2[,\ \exists N \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant N,\ |I_n| \leqslant 2\varepsilon$, ce qui signifie que la suite (I_n) converge vers 0.