Université Claude Bernard
Année universitaire 2022 – 2023

Licence de Mathématiques
Analyse 3

Rapide correction du partiel du 19 octobre 2022 - Durée : 1h30

Exercice 1 `Question de cours`

Énoncer et démontrer la formule d'intégration par parties.
Pour la correction, voir le cours !

Exercice 2 `Borne supérieure`

On considère l'ensemble X suivant :

$$X = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{n}; \quad n \in \mathbf{N}^* \right\}.$$

1. Montrer que X est majoré et minoré.
   Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on a
   $$0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{-1}{n} + \frac{2}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{n} \leq \frac{1}{n} + \frac{2}{n} = \frac{3}{n} \leq 3.$$
   Donc X est majoré par 3 et minoré par 0.
2. Monter que X admet un plus grand élément et le déterminer.
   Pour tout $n > 0$, posons
   $$u_n = \frac{1}{2n} + \frac{2}{2n} = \frac{3}{2n}$$
   et
   $$v_n = \frac{-1}{2n+1} + \frac{2}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}.$$
   On a, en décomposant avec les entiers pairs et impairs,
   $$X = \{u_n, \; n > 0\} \cup \{v_n, \; n > 0\}.$$
   Mais on a $u_n \leq 3/2$ avec $u_1 = 3/2$ et $v_n \leq 1$. Ainsi X admet un maximum égal à $3/2$.
3. Montrer que X admet une borne supérieure et une borne inférieure et les déterminer.
   Puisque X est admet un maximum (il est donc non vide), il admet donc une borne supérieure égale à son maximum : $3/2$.
   X est minorée (cf. question 1) et non vide, donc X admet une borne inférieure. 0 est un minorant donc
   $$0 \leq \inf X.$$
   Mais $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ donc $\inf X = 0$.

Exercice 3 `Etude d'une suite`

Soit $a \in]0,1]$ et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite réelle définie par

$$u_0 = a \text{ et pour tout } n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{4}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in]0,1]$.

   Montrons ce résultat par récurrence.

   Pour tout $n \in \mathbf{N}$,

   $$\mathcal{P}_n = \{u_n \in]0,1]\}.$$

   Initialisation : pour $n = 0$ c'est l'hypothèse.

   Hérédité : Supposons que $\mathcal{P}_n$ soit vérifiée et montrons $\mathcal{P}_{n+1}$.

   On a d'après l'hypothèse $\mathcal{P}_n$,

   $$0 < u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{4} \leq 1/2 + 1/4 \leq 1$$

   Ainsi $u_{n+1} \in]0,1]$. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée, ce qui achève la récurrence.

   Conclusion : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in]0,1]$.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.

   Pour tout $n \in \mathbf{N}$,

   $$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{4} - u_n = -\frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{4} = \frac{u_n}{4}(u_n - 2)$$

   Mais d'après la question précédente, on a $u_n \in]0,1]$, donc $\frac{u_n}{4}(u_n - 2) < 0$, ainsi

   $$u_{n+1} \leq u_n,$$

   ce qui montre que la suite (u_n) est décroissante.

3. En déduire que la suite converge et déterminer sa limite.

   La suite (u_n) est minorée par 0 et décroissante, donc elle converge vers un réel l. Sa limite l doit être un point fixe, ainsi l vérifie

   $$l = \frac{l}{2} + \frac{l^2}{4},$$

   soit donc $l(l-2) = 0$. On sait que $l \in [0,1]$ donc $l = 0$.

   En conclusion $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Exercice 4 `Autour de la continuité`

1. Le but de cette question est de montrer qu'une fonction continue $f : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ qui admet une limite finie ℓ en $+\infty$ est uniformément continue.

   Soit $\varepsilon > 0$.

   (a) Montrer qu'il existe un réel $A \geq 0$ tel que

   $$\forall x, y \geq A, \quad |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Puisque
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell,$$
il existe $A \geq 0$ telle que pour tout $x \geq A$,
$$|f(x) - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$
Ainsi pour tout $x, y \geq A$, par l'inégalité triangulaire
$$|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - \ell| + |f(x) - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(b) Montrer qu'il existe $\delta \in]0, 1[$ tel que
$$\forall x, y \in [0, A+1], \quad |y - x| \leq \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon.$$
La fonction f est continue sur le segment $[0, A+1]$ donc d'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[0, A+1]$, ce qui est la question demandée. On peut supposer que $\delta \leq 1$.

(c) En déduire que
$$\forall x, y \in [0, +\infty[, \quad |y - x| \leq \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon,$$
et conclure.
Soit $x, y \in [0, +\infty[$ vérifiant $|y - x| \leq \delta$. Puisque $\delta \leq 1$, il y a deux possibilités, soit $x, y \geq A$ ou bien $x, y \in [0, A+1]$. Dans le premier cas on applique la question 1 et dans le second cas on applique la question 2.

2. Dire si la fonction $g : \begin{array}{ccc} [2, +\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 1/x \end{array}$ est uniformément continue.

On sait que
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0,$$
d'après ce qui précède, appliquée à $\ell = 0$, permet de conclure que la fonction g est uniformément continue sur l'intervalle $[2, +\infty[$.