Partiel du 7 décembre 2022 - Durée : 1h30

La rédaction est importante, nous allons en tenir compte dans la correction.

Exercice 1 Question de cours

Énoncer et démontrer le théorème de comparaison séries/intégrales. Solution : Voir cours

Exercice 2 Intégrales impropres

1. Calculer $\int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt$. Solution : Par intégration par parties, on a
$$\int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt = \lim_{t\to+\infty} t(-e^{-t}) - 0(-e^{-0}) - \int_0^{+\infty}(-e^{-t})\,dt = -\lim_{t\to+\infty} e^{-t} + e^{-0} = 1.$$

2. Montrer que pour tout réel $t > 0$, on a
$$e^t - \cos t - t > 0.$$
Indication : procéder à l'étude d'une fonction. Solution : Considérons la fonction réelle f définie pour $t \in \mathbb{R}$, par $f(t) = e^t - \cos t - t$. Cette fonction est infiniment dérivable et pour $t \in \mathbb{R}$ on a $f'(t) = e^t + \sin t - 1$ et $f''(t) = e^t + t$. Pour $t > 0$, $f''(t) \geq e^t - 1 > 0$ et donc f' est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Ainsi, pour $t > 0$, $f'(t) > f'(0) = 0$ et f est également strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Cela permet de conclure que pour $t > 0$, $e^t - \cos t - t = f(t) > f(0) = 0$.

3. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{t}{e^t - \cos t - t}\,dt$ est convergente. Solution : La fonction $t \mapsto \frac{t}{e^t - \cos t - t}$ est définie, continue et (strictement) positive sur $]0, +\infty[$. De plus, $\frac{t}{e^t-\cos t - t} \underset{+\infty}{\sim} te^{-t}$. Comme par 1., $\int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt$ est convergente, on en déduit que c'est également le cas pour $\int_1^{+\infty} \frac{t}{e^t - \cos t - t}\,dt$.

4. Déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - \cos t - t}\,dt$. Solution : Par la question précédente, il reste à étudier uniquement la convergence en 0. Recherchons un équivalent simple en 0 : on a $e^t - \cos t - t = 1 + t + t^2/2 - (1 - t^2/2) - t + o(t^2) = t^2 + o(t^2)$ et donc $\frac{t}{e^t-\cos t-t} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t}$. Or $\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt$ diverge, donc $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - \cos t - t}\,dt$ est divergente.

5. Déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{t\sin t}{e^t - \cos t - t}\,dt$. Solution : La fonction $g : t \mapsto \frac{t \sin t}{e^t - \cos t - t}$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$. Par le calcul précédent, on a $\frac{t\sin t}{e^t-\cos t-t} \underset{0}{\sim} \frac{t^2}{t^2}$ et g est donc prolongeable par continuité en 0. Il reste ainsi à étudier la convergence de l'intégrale en l'infini. Or pour $t > 0$, on a $\left|\frac{t\sin t}{e^t - \cos t - t}\right| \leq \frac{t}{e^t - \cos t - t}$. La question 3 et le théorème de comparaison permet de conclure que l'intégrale étudiée est absolument convergente.

Exercice 3 `Irrationalité de` e

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x \, dx$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n > 0$. Solution : Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto x^n e^x$ est continue positive sur $[0, 1]$ et n'est pas identiquement nulle, donc son intégrale I_n est strictement positive.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n \leq \dfrac{e}{n+1}$. Solution : Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in [0, 1]$, on a $x^n e^x \leq x^n e$ et donc $I_n \leq e \displaystyle\int_0^1 x^n \, dx = \dfrac{e}{n+1}$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, trouver une relation entre I_{n+1} et I_n. Solution : Soit $n \in \mathbb{N}$. Effectuons une intégration par parties :
$$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^x \, dx = \left[x^{n+1} e^x\right]_0^1 - (n+1) \int_0^1 x^n e^x \, dx = e - (n+1) I_n.$$

4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des entiers relatifs a_n et b_n tels que
$$I_n = a_n e + b_n.$$
Solution : On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété
$$P_n : \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{Z}^2, \quad I_n = a_n e + b_n.$$
Initialisation : on a $I_0 = e - 1 = a_0 e + b_0$ où $a_0 = 1$ et $b_0 = -1$, ainsi P_0 est vérifiée.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons P_n vraie, c'est-à-dire qu'il existe deux entiers a_n et b_n tel que $I_n = a_n e + b_n$. Par la question précédente, on a $I_{n+1} = e - (n+1) I_n = (1 - (n+1) a_n) e - (n+1) b_n$. Posons $a_{n+1} = (1 - (n+1) a_n)$ et $b_{n+1} = -(n+1) b_n$. Alors $I_{n+1} = a_{n+1} e + b_{n+1}$ et les nombres a_{n+1} et b_{n+1} sont des entiers car a_n et b_n le sont, ce qui signifie que P_{n+1} est vraie.
On a donc montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \ \ \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{Z}^2, \quad I_n = a_n e + b_n$.

5. Supposons que e est rationnel et considérons alors deux entiers naturels non nuls p et q tels que $e = \dfrac{p}{q}$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n \geq \dfrac{1}{q}$. Solution : Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la question précédente, $I_n = a_n e - b_n = \dfrac{a_n p - b_n q}{q}$. Comme $I_n > 0$ (question 1), l'entier $a_n p - b_n q$ est supérieur ou égal à 1 et donc $I_n \geq \dfrac{1}{q}$.

   (b) En déduire une contradiction et conclure. Solution : La question 2 entraîne que la suite (I_n) converge vers 0 ce qui est contradictoire avec la question précédente. Ainsi e est irrationnel.