Feuille d'exercices n° 3

VALEURS PROPRES, VECTEURS PROPRES ET DIAGONALISATION

1 Valeurs propres et vecteurs propres

Les exercices de la Section 1 peuvent se faire sans utilisation du polynôme caractérisistique.

Exercice 1. Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Ecrire l'équation propre pour A.
2. Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de A sans passer par le polynôme caractéristique. Est-ce qu'il sont rationels, réels ou complexes ?
3. Quels sont les vecteurs propres et les valeurs propres de $A^2 - 1_2$?

Exercice 2 (Réflection dans le plan)**.** Soit L une droite dans le plan $\mathbb{R}^2$, qui passe par l'origine $0 \in \mathbb{R}^2$. Soit u la reflection à l'axe L.

1. Justifier géometriquement que u est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ (faire un dessin).
2. Déterminer géometriquement les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ qui sont vecteurs propres de u et les valeurs propres associées (sans utiliser des coordinés ni le polynôme caractéristique).

Exercice 3 (Rotation dans le plan)**.** Soit u_α une rotation par l'angle $\alpha \in [0, 2\pi)$ de centre 0 dans le plan $\mathbb{R}^2$.

1. Justifier géometriquement que u est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ (faire un dessin).
2. Soit $\alpha \neq 0, \pi$. Montrer géometriquement qu'aucun vecteur de $\mathbb{R}^2$ est vecteur propre de u_α. Est-ce que u_α est diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
3. Quels sont les vecteurs propres et valeurs propres de u_α dans le cas $\alpha = 0$ et le cas $\alpha = \pi$?
4. Exprimer u_α dans la base canonique $\mathscr{E} = (e_1, e_2)$. On note $A_\alpha := [u_\alpha]_\mathscr{E}$.
5. Déterminer (algébriquement) les vecteurs propres dans $\mathbb{C}^2$ et les valeurs propres (complexe) associées de A_α. Est-ce que u_α est diagonalisable sur $\mathbb{C}$?

Exercice 4 (Cisaillement dans le plan)**.** Soit L une droite dans le plan $\mathbb{R}^2$, qui passe par l'origine $0 \in \mathbb{R}^2$. Soit $a > 0$. Soit u_a la transformation par cisaillement lelong de cette droite définie ainsi : Imaginez une deuxième droite L' parallel et à une distance 1 de L. Il existe une application linéaire u_a, qui laisse les points de L fixe et décale les points de L' par une distance a. (Pour rendre cette application unique, specifier vers quel coté se trouve L' par rapport à L et vers quel coté on décale L'.)

1. Déterminer géometriquement les vecteurs propres et les valeurs propres de u_a (faire un dessin).
2. Est-ce que u_a est diagonalisable ?

3. Choisir une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^2$ et exprimer u_a dans cette base.

Exercice 5. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ représenté dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de u. En déduire que 0 est valeur propre de u.
2. Montrer que $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ est vecteur propre de u.
3. Déterminer les valeurs propres de u (sans passer par le polynôme caractéristique).
4. Construire une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres de u.
5. En déduire que u est diagonalisable et donner la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$.

2 Polynôme caractéristique

Exercice 6.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Vérifier la formule suivante pour le polynôme caractéristique :

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A).$$

Ici $\mathrm{tr}(A)$ est la trace de A, $\mathrm{tr}((a_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

2. Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique est alors de la forme

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + \mathrm{tr}(A)\lambda^2 - f(A)\lambda + \det(A).$$

(a) Exprimer $f(A)$ à l'aide des cofacteurs de A.

(b) On suppose maintenant que la matrice A est triangulaire supérieure. Montrer que

$$f(A) = \frac{1}{2}\Big(\big(\mathrm{tr}(A)\big)^2 - \mathrm{tr}(A^2)\Big).$$

(NB : La formule reste vraie sans l'hypothèse que A soit triangulaire.)

Exercice 7. Soient a, b et c trois nombres complexes. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}.$$

1. Quelle est la somme des valeurs propres de A ?
2. Quel est le produit des valeurs propres de A ?
3. Montrer que si son déterminant n'est pas nul, A est diagonalisable.
4. Montrer que si son déterminant est nul, A n'est diagonalisable que si elle est nulle.
5. Montrer que A est diagonalisable sauf si son rang est égal à 1.
6. On suppose que la matrice A est réelle ; à quelle condition est-elle diagonalisable par un changement de base réel ?

3 Diagonalisation

Exercice 8. Déterminer si les endomorphismes u, u_α, u_a des Exercices 2,3,4 sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$ ou non. Les-quels sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$?

Exercice 9. Soit φ et ψ les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ dont les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont respectivement les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si chacun de ces endomorphismes est diagonalisable. Si oui, trouver une base formée de vecteurs propres et la matrice correspondante dans cette base en donnant la matrice de passage.

Exercice 10. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Quelles sont les valeurs propres de f ?
2. Existe-t-il une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale ? Si oui, donner une telle base.
3. Déterminer la matrice f^n pour $n \in \mathbb{N}$ dans une base de votre choix.

Exercice 11. Diagonaliser dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, en donnant la matrice de passage, les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12. Discuter en fonction de a, b et c la possibilité de diagonaliser les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Exercice 13. On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{C}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme u.
2. Montrer sans nouveaux calculs qu'il existe une base de $\mathbb{C}^3$ formée de vecteurs propres.
3. Déterminer la matrice de passage de la base canonique à une base formée de vecteurs propres.
4. L'endomorphisme u est-il diagonalisable sur les corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$?

Exercice 14. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En diagonalisant A, trouver une solution Z dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ à l'équation $Z^2 = A$.

Exercice 15. Soit $V = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles 2×2 et soit u l'endomorphisme de V défini par

$$u\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que l'endomorphisme u est diagonalisable et construire une base de vecteurs propres de u.
2. Quel est le polynôme caractéristique de u ?

Exercice 16. On note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par

$$u(P) = (X^2 - 1)P'' + 3XP'.$$

1. Écrire la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que u est diagonalisable.
3. Résoudre l'équation $u(P) = P$.

Exercice 17. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E de rang égal à 1.

1. Montrer que la trace de u est une valeur propre de u.
2. En déduire que u est diagonalisable si et seulement si sa trace n'est pas nulle.