Feuille d'exercices n° 7

TRIGONALISATION

Exercice 1. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 22 & -9 \\ 25 & -8 \end{pmatrix}$$

1. Trouver une matrice P inversible et une matrice T triangulaire t.q.

$$T = P^{-1}AP.$$

Exercice 2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

1. Calculer T^n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Si $\lambda \neq 0$, calculer T^n pour $n < 0$.

Exercice 3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

1. En utilisant la série entière $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ calculer e^T. (On admet que la série est convergente aussi pour les matrices.)
2. En utilisant la série entière $\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$ calculer $\cos(T)$. (On admet que la série est convergente aussi pour les matrices.)

Exercice 4. On considére la relation de récurrence

$$u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1}$$

avec conditions initiales $u_0 = 0$, $u_1 = 1$.

1. Trouver une matrice A t.q. l'équation
$$A \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$
est équivalent à la relation de récurrence.
2. Trouver une matrice P inversible et une matrice T triangulaire t.q.

$$T = P^{-1}AP.$$

3. En déduire la solution u_n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. Pour chacun des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

.

1. Déterminer les valeurs propres et les espaces carractéristiques de la matrice.
2. Trigonaliser la matrice (donner la forme triangulaire et la matrice de passage).

Exercice 6. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = 2x - y - z \\ y' = 2x + y - 2z \\ z' = 3x - y - 2z. \end{cases}$$

avec $x(0) = y(0) = z(0) = 1$.

Exercice 7. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ et

$$\forall n \geq 0, \quad u_{n+3} = 45u_n - 39u_{n+1} + 11u_{n+2}.$$

1. Écrire la relation de récurrence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ sous la forme d'une équation matricielle

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$$

2. Trouver une matrice inversible P et une matrice triangulaire T, t.q.

$$T = P^{-1}AP.$$

3. Calculer u_n pour tout n. (Il n'est pas necessaire d'inverser P.)