Feuille d'exercices n°5
POLYNÔME MINIMAL

Exercice 1. Pour les matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer leurs espaces propres.
2. Déterminer leurs espaces caractéristiques.
3. Déterminer leur polynôme minimal.

Exercice 2. Déterminer le polynôme minimal des matrices suivantes avec $a \neq b$:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. A l'aide du théorème de Cayley-Hamilton, calculer l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Soit J une matrice complexe de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ définie par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer J^p pour tout entier $1 \leq p \leq 4$.
2. Montrer que I_4, J, J^2, J^3 sont linéairement indépendantes.
3. En déduire que le polynôme minimal de J est de degré 4.
4. Quel est le polynôme minimal de J?
5. Quels sont les valeurs propres de J?

Exercice 5. Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et u un endomorphisme de E vérifiant

$$u^4 = u^2$$

On suppose que 1 et -1 sont valeurs propres de f.

1. Quelles sont les possibilitées pour le polynôme minimal de u?
2. Montrer que u est diagonalisable.
3. Soit D une matrice diagonale associée à u dans une base de vecteurs propres. Quelles sont les possibilitées pour D?
4. Quelles sont les possibilitées pour le polynôme caractéristique de u?

Exercice 6. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ le polynôme $P(X) = X^3 - X^2$. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n qui est annulé par P.

1. Quelles sont les possibilités pour le polynôme minimal de u?
2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E et k t.q.

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1_k & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} & \text{si } k \neq 0, n \\ 1_n & \text{si } k = n \\ N & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

où N est une matrice nilpotent d'indice 1 ou 2.