Feuille d'exercices n°5
Sous-espaces stables - Polynôme minimal

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les sous-espaces de dimension 0 et 3 qui sont stables pour A.
2. Déterminer les sous-espaces de dimension 1 qui sont stables pour A.
3. Déterminer les espaces caractéristiques de A avec leur dimension.
4. Déterminer les espaces cycliques de A avec leur dimension.
5. Déterminer les sous-espaces de dimension 2 qui sont stables pour A.
   Indication: Montrer que tout sous-espace stable pour A de dimension 2 est cyclique pour A.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les espaces caractéristiques de A avec leur dimension.
2. Déterminer les espace cycliques de A et leur dimension.
3. Déterminer les sous-espaces stables pour A avec leur dimension. Sont tous les sous-espaces stables pour A aussi cycliques pour A?

Exercice 3. Soit u un endomorphisme de E et $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $v = u + \lambda \,\mathrm{id}$.

1. Comment le valeurs propres de u et de v sont-elles reliées?
2. Comment les espaces propres de u et de v sont-ils reliés?
3. Comment les espaces caractéristiques de u et de v sont-ils reliés?
4. Comment les espaces cycliques de u et de v sont-ils reliés?
5. Comment les espaces stables de u et de v sont-ils reliés?

Exercice 4. On considère l'espace des polynômes $\mathbb{K}[X]$.

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polyôme de degré 1. Soit $u : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ donné par
   $$u(Q) = PQ$$
   Montrer que u est un endomorphisme. Montrer qu'il existe un $Q \in \mathbb{K}[X]$ t.q. l'espace cyclique $\langle Q \rangle_P$ est égal à $\mathbb{K}[X]$.
2. Soit $d : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ donné par
   $$d(Q) = Q'$$
   (la dérivée). Montrer que d est un endomorphisme. Montrer que tout espace cyclique pour d est de dimension finie.