Université Claude Bernard — Licence de Mathématiques
Année universitaire 2022 – 2023 — Algèbre 3

Corrigé du partiel du 18 octobre 2022 - Durée : 1h

`Les documents ne sont pas permis. Rédigez de manière claire et structurée, ce sera pris en compte dans la notation. Le barême est indicatif.`

Exercice 1 `Question de cours, 1+3 pts.`

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1. Donner la définition d'une valeur propre pour u.
2. Montrer que λ est une valeur propre pour u si et seulement si $u - \lambda\mathrm{id}$ n'est pas inversible.

Corrigé :

1. λ est valeur propre pour u s'il existe $x \in E$, $x \neq 0_E$ t.q. $u(x) = \lambda x$.
2. λ est valeur propre de u si et seulement s'il existe $x \in E$, $x \neq 0_E$ t.q. $u(x) - \lambda x = 0_E$. Ceci est équivalent à $\ker(u - \lambda\mathrm{id}) \neq 0_E$. Ceci est équivalent à $u - \lambda\mathrm{id}$ non injectif. Ceci est équivalent à $u - \lambda\mathrm{id}$ non inversible, car le théorème du rang implique qu'un endomorphism est injectif si et seulement s'il est surjectif.

Exercice 2 `Une matrice à diagonaliser, 2+2+3 pts.`

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. Déterminer une base $\mathcal{B}$ formée de vecteurs propres.
3. Diagonaliser A, en donnant la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, ainsi que la relation liant A, P et la matrice diagonale obtenue.

Corrigé :

1. Polynôme caractéristique :

$$P_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda) = (1-\lambda)(\lambda+1)\lambda$$

donc valeurs propres $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$.

2. Vecteurs propres :
Pour $\lambda_1 = 0$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $v_1 = (2, -1, 0)$ est un vecteur propre.
Pour $\lambda_2 = 1$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $v_2 = (11, -3, 1)$ est un vecteur propre.
Pour $\lambda_3 = -1$,

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $v_3 = (1, -1, 0)$ est un vecteur propre. Finalement $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de vecteurs propres.

3. La matrice de passage est

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 `Une symétrie non orthogonale, 3+2+2 pts.`

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

1. Déterminer ses valeurs propres, puis un vecteur propre associé à chacune des valeurs propres.
2. Lorsqu'on a deux sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G dans un espace vectoriel E, on appelle *symétrie par rapport à F parallèlement à G* l'endomorphisme u de E défini par $u(x) = x$ pour tout $x \in F$ et $u(x) = -x$ pour tout $x \in G$.
Déterminer deux sous-espaces F et G de $\mathbb{R}^2$ tels que u soit la symétrie par rapport à F parallèlement à G.
3. Dessiner dans $\mathbb{R}^2$ les espaces F et G de la question précédente, et déterminer graphiquement $u(3e_2)$, où e_2 est le deuxième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^2$, en faisant apparaître sur votre dessin les traits de construction adéquats.

Corrigé :

1. Polynôme caractéristique :

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

donc valeurs propres $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$.
Vecteurs propres :
Pour $\lambda_1 = 1$,

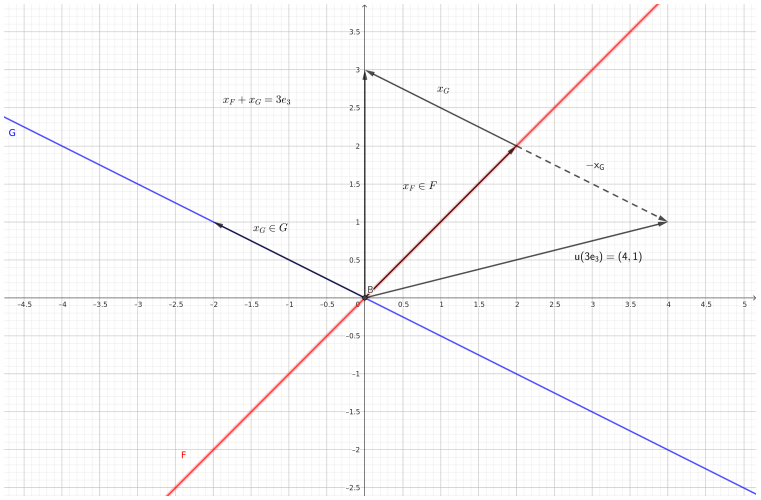
$$\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $v_1 = (1, 1)$ est un vecteur propre.
Pour $\lambda_2 = -1$,

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $v_1 = (2, -1)$ est un vecteur propre.

2. Les vecteurs de F satisfont $u(x) = x$ donc sont des vecteurs propres à la valeur propre $\lambda_1 = 1$. Donc $F = Vect\{(1,1)\}$. Les vecteurs de G satisfont $u(x) = -x$ donc sont des vecteurs propres à la valeur propre $\lambda_2 = -1$. Donc $G = Vect\{(2,-1)\}$. F et G sont supplémentaires car espaces propres à deux valeurs propres distinctes.
3. F est la droite en rouge et G la droite en bleu dans le dessin suivant :



Exercice 4 `Matrice compagnon, 4 pts.`

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_{n-1}, \lambda$ des réels. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & \lambda + a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Calculer le déterminant de A.

Corrigé : Par linearité dans la derniére cologne

$$\det A = \det \begin{pmatrix} \lambda & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & \lambda & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & \lambda \end{pmatrix} + \det A' = \lambda^n + \det A'$$

où

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

On dévelope A' le long la dernière cologne. Alors

$$\det A' = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} a_{i-1} \det \begin{pmatrix} B_i & 0 \\ 0 & C_i \end{pmatrix}$$

où B_i est la matrice carrée de taille $i-1$

$$B_i = \begin{pmatrix} \lambda & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & \lambda & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

et C_i est la matrice carrée de taille $n-i$

$$C_i = \begin{pmatrix} -1 & \lambda & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

De plus, $\det B_i = \lambda^{i-1}$ et $\det C_i = (-1)^{n-i}$. Donc

$$\det A = \lambda^n + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} a_{i-1} \det B_i \det C_i = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i$$