Entraînement hivernal

N.B. *Un exercice et/ou une question marqué avec un* $*$ *signifie que l'exercice en question est en dehors de programme. Soyons zen* ≪禅≫.

Déterminant.

Exercice 1 ***(Polynômes de Tchebyscheff)*** *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *soit* $T_n(X) \in \mathbb{R}[X]$ *le polynôme de degré* n *tel que l'évaluation en* $\lambda \in \mathbb{R}$ *soit donné par le déterminant*

$$T_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 2\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 2\lambda & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix}.$$

1. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$.
2. *En déduire que* $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.
   Indication : la formule $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ pourrait être utile.

Exercice 2 * *Soient* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $n > 1$, $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots y_n \in \mathbb{K}$ *tels que* $x_i + y_j \neq 0$ *pour tous* $1 \leq i, j \leq n$. *Calculons le déterminant de la matrice* $C_n = (c_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, *où* $c_{i,j} := \dfrac{1}{x_i + y_j}$.

1. *En appliquant le pivot de Gauss sur les colonnes, montrer que*
$$\det C_n = c_{n,n} \det\left(c_{i,j} - \frac{c_{n,j}}{c_{n,n}} c_{i,n}\right)_{1\leq i,j<n}.$$
2. *Montrer que* $\left(c_{i,j} - \dfrac{c_{n,j}}{c_{n,n}} c_{i,n}\right)_{1\leq i,j<n} = \operatorname{diag}\left(\dfrac{x_i - y_n}{x_i + y_n}\right)_{1\leq i<n} C_{n-1} \operatorname{diag}\left(\dfrac{y_j - y_n}{x_n + y_j}\right)_{1\leq j<n}$,
   où $\operatorname{diag}(a_1, \cdots, a_{n-1})$ *signifie la matrice diagonale* $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \end{pmatrix}$.
3. *En déduire que*
$$\det C_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(x_i - x_n)(y_i - y_n)}{(x_n + y_n)\prod_{i=1}^{n-1}(x_i + y_n)(x_n + y_i)} \det C_{n-1}.$$
4. *Par récurrence sur* $n > 1$, *montrer la formule suivante :*
$$\det\left(\frac{1}{x_i + y_j}\right)_{1\leq i,j\leq n} = \frac{\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_i - x_j)(y_i - y_j)}{\prod_{i,j=1}^{n}(x_i + y_j)}.$$
   Ce déterminant est appelé ***déterminant de Cauchy***.

Diagonalisation.

Exercice 3 *1. Soit* $A = \begin{pmatrix} 8 & 12 & -6 \\ -3 & -4 & 3 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ *une matrice carrée.*

i) Calculer les valeurs propres de A.

ii) Pour chaque valeur propre λ *de* A, *calculer le rang de la matrice* $A - \lambda \mathbf{1}_3$.

iii) En déduire que la matrice A *est diagonalisable.*

iv) Donner une base $\mathcal{B}$ *formée des vecteurs propres.*

v) Donner une matrice de passage P *et la matrice diagonale* D *vérifiant* $D = P^{-1}AP$.

2. Ensuite, on considère le système d'équations différentielles suivant

$$\begin{array}{rrrr} x'(t) = & 8x(t) + & 12y(t) + & -6z(t) \\ y'(t) = & -3x(t) - & 4y(t) + & 3z(t) \\ z'(t) = & 3x(t) + & 6y(t) - & z(t) \end{array}$$

avec les conditions initiales $x(0) = 2, y(0) = 0, z(0) = 1$.

i) Exprimer le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *dans la base* $\mathcal{B}$.

ii) En déduire la solution du système d'équations différentielles ci-dessus.

Exercice 4 *Soit* $A = \begin{pmatrix} -13 & 10 & 10 \\ 15 & -8 & -10 \\ -30 & 20 & 22 \end{pmatrix}$. *Ici, on va calculer* A^n $(n \in \mathbb{Z})$ *avec deux manières différentes.*

1. Déterminer le rang de la matrice $A - 2\mathbf{1}_3$.

2. En déduire le polynôme caractéristique $P_A(X)$ *de* A.

3. Montrer que la matrice A *est diagonalisable.*

4. Calculer A^n *pour* $n \in \mathbb{Z}$ *avec l'aide*

i) d'une diagonalisation de la matrice A, *et*

ii) du reste de la division euclidienne de* X^n *par* $P_A(X)$ *pour* $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 *Soit* $a \in \mathbb{C}$ *et soit* $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice A *soit inversible.*

2. Supposons que A *est inversible. Calculer* A^n *pour* $n \in \mathbb{Z}$.

Trigonalisation.

Exercice 6 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 13 & -7 \\ -5 & 19 & -10 \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer les valeurs propres.*
2. *Pour chaque valeur propre* λ*, déterminer son espace caractéristique* F_λ*.*
3. *Trigonaliser* A*.*
4. *Donner une formule de* A^n *pour* $n \in \mathbb{Z}$*.*

Exercice 7 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que le polynôme caractéristique de la matrice* A *a une racine triple, disons* λ*.*
2. *Calculant* $\operatorname{rang}(A - \lambda \mathbf{1}_3)$*, décrire la réduction de Jordan de* A*.*

Exercice 8 *Soit* u *un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel* E *de dimension* 5*.*

1. *Justifier qu'il existe une base* $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ *de* E *dans laquelle* u *est représentée par une des matrices suivantes :*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. *Pour chaque matrice ci-dessus :*
   (a) *Donner le polynôme minimal.*
   (b) *Identifier les blocs de Jordan.*
   (c) *Idenfier les sous-espaces cycliques sous-jacentes les blocs Jordan en donnant une base (en fonction des* b_i $(1 \leq i \leq 5)$*).*
   (d) *En déduire une partition de la base* $\mathcal{B}$ *en chaines de Jordan.*

Exercice 9 *Soit* $E \in \mathbb{R}$ *donné. On considère le système récurrent pour une suite bi-laterale* $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *de nombres complexes,*

$$Eu_n = u_{n+1} + u_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

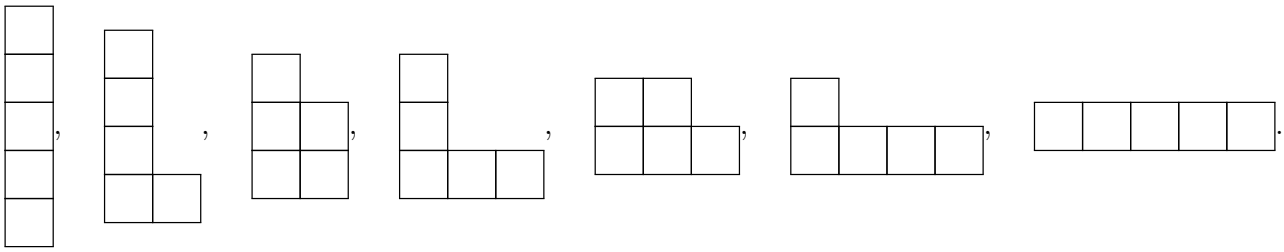
On s'interesse à la question si les solutions du système sont bornées. Ici, une solution $(u_n)_n$ *de (1) est dite bornée, s'il existe un* $C > 0$ *t.q.* $|u_n| \leq C$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$*.*

1. *Déterminer une matrice* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *t.q. l'équation matricielle*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

   est satisfaite pour tout $n \in \mathbb{Z}$ *si et seulement si* $(u_n)_n$ *satisfait (1).*
2. *Déterminer les valeurs propres de* A.
3. *Pour quelle valeurs de* E *est-ce que* A *est diagonalisable sur* $\mathbb{C}$ *?*
4. *Pour quelle valeurs de* E *est-ce que* A *est diagonalisable sur* $\mathbb{R}$ *?*
5. *Déterminer les solutions du système récurrent pour* $|E| > 2$. *En déduire qu'aucune solution non-nul pour* $|E| > 2$ *est bornée.*
6. *Déterminer les solutions du système récurrent pour* $|E| < 2$. *En déduire que toute solution pour* $|E| < 2$ *est bornée.*
7. *Déterminer les solutions du système récurrent pour* $|E| = 2$. *Sont elles bornées ?*

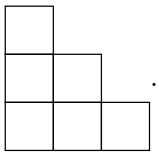
Revenons sur l'Exercice 8.* Chacune des 7 matrices $[u]_{\mathcal{B}}$ dans cet exercice peuvent être représentée par un diagramme suivant, appelé un **tableau de Young**, respectivement :



Notons qu'ils correspondent aux **partitions** de 5 : (1^5), $(1^3 2^1)$, $(1^1 2^2)$, $(1^2 3^1)$, $(2^1 3^1)$, $(1^1 4^1)$, (5^1).

Ce tableau encode quelques informations intéressantes que nous expliquons ici. Considérons un endomorphisme nilpotent $u \in \mathcal{L}(E)$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension 6 avec une base $\mathcal{B}' = (b'_i)_{1 \leq i \leq 6}$ sur laquelle la matrice de u est donnée par

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cet endomorphisme correspond au tableau  . Placons les vecteurs $\{b'_i\}_{1 \leq i \leq 6}$ dans des cases comme suit : $\begin{array}{|c|c|c|} \hline b'_1 & & \\ \hline b'_2 & b'_3 & \\ \hline b'_4 & b'_5 & b'_6 \\ \hline \end{array}$. On obtient une interprétation des colonnes suivantes :

1. la première colonne $\begin{array}{|c|}\hline b'_1\\\hline b'_2\\\hline b'_4\\\hline\end{array}$ représente le sous-espace propre $E_0 = \operatorname{Ker} u$,
2. les deux premières colonnes (à gauche) $\begin{array}{|c|c|}\hline b'_1 & \\\hline b'_2 & b'_3\\\hline b'_4 & b'_5\\\hline\end{array}$ représente $\operatorname{Ker} u^2$, enfin,
3. le tableau $\begin{array}{|c|c|c|}\hline b'_1 & & \\\hline b'_2 & b'_3 & \\\hline b'_4 & b'_5 & b'_6\\\hline\end{array}$ correpond au $\operatorname{Ker} u^3 = \mathbb{K}^6$,

c'est-à-dire, les colonnes du tableau décrivent une filtration $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^2 \subset \operatorname{Ker} u^3$ du **sous-espace caractéristique**.

Une interprétation de chaque ligne est aussi intéressante. Chaque ligne correspondent à un sous espace cyclique et une chaine de Jordan :

1. la première ligne $\begin{array}{|c|}\hline b'_1\\\hline\end{array}$ correspond au sous espace stable F_0^1 engendré par $\{b'_1\}$ et la matrice du morphisme induit $u_{F_0^1}$ est $\big(0\big)$,
2. la deuxième ligne $\begin{array}{|c|c|}\hline b'_2 & b'_3\\\hline\end{array}$ correspond au sous espace cyclique F_0^2 engendré par $\{b'_2, b'_3\}$ et la matrice du morphisme induit $u_{F_0^2}$ dans la base (b'_2, b'_3) est $\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$, et
3. la troisième ligne $\begin{array}{|c|c|c|}\hline b'_4 & b'_5 & b'_6\\\hline\end{array}$ correspond au sous-espace stable F_0^3 engendré par $\{b'_4, b'_5, b'_6\}$ et la matrice du morphisme induit $u_{F_0^3}$ dans la base (b'_4, b'_5, b'_6) est $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$....,

c'est-à-dire, chaque ligne correspond à un **bloc de Jordan**.

Ces interprétations peuvent vous aider à voir la structure de sous-espace caractéristiques en lien avec les sous-espaces stables. Nous vous proposons à travailler sur les matrices de taille 5 avec les données ci-dessus.

Remarque. Pour analyser la structure du sous-espace caractéristique F_λ pour un $\lambda \in \mathbb{K}$, il vous suffit de travailler avec l'endomorphislme $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ au lieu de u lui-même. □