Correction du partiel du 29 novembre 2022

Questions de cours `4 pts.`

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1. Donner la définition d'un espace caractéristique pour u. (2 pts)
2. Soit P un polynôme annulateur pour u.
   Montrer que toute valeur propre pour u est une racine de P. (2 pts)

Exercice 1 `6 pts.`

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les espaces propres de A. (2 pts)
2. Déterminer les espaces caractéristiques de A. (2 pt)
3. Déterminer le polynôme minimal de A. (2 pt)

Correction 1 *1. On commence par calculer le polynôme caractéristique de A, en développant par rapport à la première ligne (par exemple) :*

$$\begin{aligned} P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & -1 \\ -1 & -X & 1 \\ 1 & 2 & 1-X \end{vmatrix} &= (1-X)\begin{vmatrix} -X & 1 \\ 2 & 1-X \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -X \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (1-X)(-X+X^2-2) - (-2+X) \\ &= -X^3 + 2X^2 + X - 2 + 2 - X \\ &= -X^3 + 2X^2 \\ &= -X^2(X-2) \end{aligned}$$

Donc les valeurs propres de A sont 0 et 2. Déterminons maintenant les espaces propres :
Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$X \in E_0 \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ -x + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ y = -x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X \in \text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Donc $E_0 = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$.

$$X \in E_2 \Leftrightarrow AX = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 2x \\ -x + z = 2y \\ x + 2y + z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = -x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X \in \text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix})$$

Donc $E_2 = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix})$.

2. *Pour* F_2*, il n'y a rien à faire, en effet* 2 *est une valeur propre de multiplicité algébrique* 1 *donc* $F_2 = E_2$*. Pour* F_0*, on calcule* $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$*, puis on en déduit* $\ker(A^2) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$*. Pour cela soit on résout un système comme à la question précédente, soit on remarque que ces deux vecteurs sont évidemment dans le noyau et que* A^2 *est de rang* 1*. On peut calculer* A^3 *et se rendre compte que le noyau se stabilise, mais le plus élégant est de dire que les espaces caractéristiques sont en somme directe dans* $\mathbb{R}^3$ *par le Lemme des noyaux (c'est du cours), et que donc la dimension de* F_0 *doit être* 2 *(puisque* F_0 *est de dimension* 1*). Donc* $F_0 = \ker(A^2) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$.

3. *Plusieurs méthodes ici encore, un bon nombre d'entre vous a dit que* m_A *doit diviser* P_A *et avoir les mêmes racines ET être unitaire (souvent oublié), c'est donc soit* $X(X-2)$ *soit* $X^2(X-2)$*, or ce doit être un polynôme annulateur et on vérifie que* $A(A - 2I_3) \neq 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

Une autre manière de faire est d'avoir compris (mais ce n'est pas explicite dans le cours) que $m_A(X)$ est le produit des $(X-\lambda)^{q_\lambda}$ où λ parcourt les valeurs propres de A et q_λ est la puissance intervenant dans la définition du cours de l'espace caractéristique, ce qui donne directement $m_A(X) = X^2(X-2)$ ici puisqu'on a déjà calculé les espaces caractéristiques.

Exercice 2 `5 pts.`

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Trouver une matrice P inversible et une matrice T triangulaire t.q. $T = P^{-1}AP$. (2 pts)
2. Calculer A^n. (2 pts)
3. On considère le système de récurrence $a_{n+1} = a_n - b_n$, $b_{n+1} = a_n + 3b_n$ avec des conditions initiales $a_0 = b_0 = 1$. Trouver a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. (1 pt)

Correction 2 *1. On calcule facilement $P_A(X) = (X-2)^2$ (exo). Déterminons E_0 : Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.*

$$X \in E_2 \Leftrightarrow AX = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2x \\ x + 3y = 2y \end{cases} \Leftrightarrow y = -x \Leftrightarrow X = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix})$$

Donc $E_2 = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix})$. On suit maintenant l'algorythme du cours : soit $b_1 \notin E_2$, par exemple $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on pose $b_2 = (A - 2I_2)b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_2$ (ce n'est pas une surprise). La matrice correspondant au changement de base de la base $\mathcal{B} = (b_2, b_1)$ vers la base canonique est $P = ([b_2]_\mathcal{C}, [b_1]_\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et on a naturellement $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, car $Ab_2 = 2b_2$ et $Ab_1 = 2b_1 + b_2$ par définition de b_2. On n'a PAS besoin à ce stade de calculer P^-1.

2. *Par récurrence immédiate $A^n = PT^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons T^n : On a $T = D + N$ avec $D = 2I_2$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & O \end{pmatrix}$ nilpotente d'ordre 2. Clairement D et N commutent, on peut donc utiliser la formule du binôme de Newton :*

$$T^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k}N^k = D^n + nD^{n-1}N = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

La deuxième égalité est due au fait que $N^k = 0$ pour $k \geq 2$. Maintenant on a besoin de calculer P^{-1}, ce qui est facile avec la formule de la transposée de la comatrice : $P^{-1} = \frac{1}{\det(P)}{}^t\mathrm{co}(P) = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Donc on a

$$A^n = PT^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n2^{n-1} & 2^n + n2^{n-1} \\ 2^n & 2^n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2^n - n2^{n-1} & -n2^{n-1} \\ n2^{n-1} & 2^n + n2^{n-1} \end{pmatrix}$$

3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$; le système s'écrit alors $X_{n+1} = AX_n$. C'est une suite géométrique que nous savons expliciter par récurrence immédiate : on a*

$$X_n = A^n X_0 = \begin{pmatrix} 2^n - n2^{n-1} & -n2^{n-1} \\ n2^{n-1} & 2^n + n2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n - n2^{n-1} - n2^{n-1} \\ n2^{n-1} + 2^n + n2^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n(1-n) \\ 2^n(1+n) \end{pmatrix}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'où $a_n = 2^n(1-n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 `6 pts.`

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2 et A^3. (1 pt)
2. En déduire un polynôme annulateur de A. (1 pt)
3. En déduire également l'inverse de la matrice A. (1 pt)
4. Donner le polynôme minimale de u. (2 pt)
5. Est-ce qu'il existe une base $\mathcal{B}$ dans $\mathbb{R}^3$ pour laquelle $[u]_{\mathcal{B}}$ est triagonale ? (1 pt)

Correction 3 *1.*

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

2. *On note que $A^3 + 8I = 0$, d'où $P(X) = X^3 + 8$ est un polynôme annulateur.*
3. *$A^3 = -8I$ implique que $A(-\frac{1}{8}A^2) = I$, donc A est inversible avec inverse*

$$A^{-1} = -\frac{1}{8}A^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{3} \\ 0 & -\frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

4. *Le polynôme minimal $m_A(X)$ divise $P(X) = X^3 + 8$. On devine que -2 est une racine de P. Division euclidienne de $P(X)$ par $X + 2$ donne $P(X) = (X + 2)Q(X)$ avec $Q(X) = X^2 - 2X + 4$. Puisque $Q(X) = X^2 - 2X + 4$ est irréductible sur $\mathbb{R}$ ($\Delta = -12$), le polynôme minimal ne peut être que $X + 2$, $Q(X)$ ou $P(X)$. Puisque -2 est une valeur propre de A, c'est aussi une racine de m_A est donc $X + 2$ divise m_A. De plus, $A \neq -2I$, donc $m_A(X) \neq X + 2$. Donc la seule option est $m_A(X) = P(X)$.*
5. *Comme le polynôme minimal $m_A(X) = (X + 2)(X^2 - 2X + 4)$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, nous ne pouvons pas trigonaliser la matrice A sur $\mathbb{R}$, c.à.d. il n'existe pas de base dans $\mathbb{R}^3$ dans laquelle A est diagonale.*