Cauchy - Schwarz

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|.\|y\|$$

Inégalité triangulaire

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$$

$$= \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

$$\leq \|x\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2$$

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|.\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

d'où le résultat

Preuve de CS $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $y \neq 0$

$$\|x+ty\|^2 = t^2\|y\|^2 + 2t\langle x,y\rangle + \|x\|^2 \geq 0$$

$t \in \mathbb{R}$ polynôme de degré 2 en t

$\rightsquigarrow$ disc ≤ 0