q forme quadratique

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2}\left[q(x+y) - q(x) - q(y)\right]$$

alors ϕ est une fbs telle $\phi(x,x) = q(x)$

$$\phi(x,x) = \frac{1}{2}\left[\underset{\substack{\parallel \\ 4q(x)}}{q(2x)} - 2q(x)\right] = q(x)$$

$$\phi(y,x) = \phi(x,y)$$

On passe à l'écriture matricielle (on fixe une base)

$$q(x) = {}^tXAX$$

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2}\left[{}^t(X+Y)A(X+Y) - {}^tXAX - {}^tYAY\right]$$

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2}\left[\cancel{{}^tXAX} + {}^tXAY + {}^tYAX + \cancel{{}^tYAY} - \cancel{{}^tXAX} - \cancel{{}^tYAY}\right]$$

mais ${}^tYAX$ est une matrice 1×1

donc ${}^tYAX = {}^t({}^tYAX) = {}^tX\,{}^tA\,Y$

d'où $\phi(x,y) = {}^tX \left[\frac{1}{2}(A + {}^tA)\right] Y$ $\underline{fb}$

matrice symmétrique

Expression algébrique

$E = \mathbb{R}^3 \qquad q(x) = x_1^2 - 2x_2x_3 + x_3^2$

$\leadsto \phi(x,y) = x_1y_1 - x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_3$

$a x_i^2 \to a x_i y_i$

$a x_i x_j \to \frac{1}{2} a x_i y_j + \frac{1}{2} a x_j y_i$

$i \neq j$