Exo.

$$\phi(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3 + 6x_1y_3 + 2x_2y_1 - 3x_2y_3 + 3x_3y_1 + x_3y_2$$

1. $\phi(z,w) = 2\times 5 + (-1)\times 15 + 3\times 0\times 1 + 6\times 2\times 1 - 3\times(-1)\times 1 + 3\times 0\times 5 + 0\times 15 = 10 - 15 + 12 + 3 = 10$

2. $\phi(x,y) = (x_1, x_2, x_3)\, A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$$\phi(x,y) = x_1(y_1 + 6y_3) + x_2(y_2 + 2y_1 - 3y_3) + x_3(3y_3 + 3y_1 + y_2)$$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} y_1 + 6y_3 \\ y_2 + 2y_1 - 3y_3 \\ 3y_3 + 3y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

coeff. de x_3y_2

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Ker}\,\Phi_g = \{x \in E \mid \forall y \in E \ \ \phi(x,y) = 0\}$$ fbs

$$\mathrm{Ker}\,\Phi_d = \{y \in E \mid \forall x \in E \ \ \phi(x,y) = 0\}$$

$\mathrm{Ker}\,\Phi_g$ $=$ $\mathrm{Ker}\,\Phi_d$

On cherche les vecteurs $x \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\forall y \in \mathbb{R}^3 \quad \phi(x,y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \phi(x,y) = y_1(x_1 + 2x_2 + 3x_3) + y_2(x_2 + x_3) + y_3(3x_3 + 6x_1 - 3x_2) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_3 + \underline{6}x_1 - 3x_2 = 0 \leftarrow L_3 - 6L_1 \end{cases}$$

syst. de m équations ind. (linéaires homogènes) en n inconnues : solutions = sev de dim. n−m

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ -14x_2 - 15x_3 = 0 \leftarrow L_3 + 14L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

donc $\mathrm{Ker}\,\phi = \{0\}$

donc $\operatorname{rang} \phi = 3 - \dim \operatorname{Ker} \phi = 3$

3. $\mathcal{B}' = \big(\underset{v_1}{(1,1,1)}, \underset{v_2}{(0,1,1)}, \underset{v_3}{(0,0,1)} \big)$

- On calcule $\phi(v_i, v_j)$ $\forall i,j$
  ↳ matrice

- On calcule la matrice de chgt de base, puis formule du cours

  ${}^tPAP$

4. Calculer $v_1^{\perp}$

Trouver $y \in \mathbb{R}^3$ tels que $\phi(v_1, y) = 0$

$\Leftrightarrow \cancel{y_1} + \cancel{y_2} + \cancel{3y_3} + \cancel{6y_3} + \cancel{2y_1} - \cancel{3y_3} + \cancel{3y_1} + \cancel{y_2} = 0$

$\Leftrightarrow 6y_1 + 2y_2 + 6y_3 = 0 \Leftrightarrow 3y_1 + y_2 + 3y_3 = 0$

$v_1^{\perp}$ est un sev de dim. $3 - 1 = 2$

avec pour base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

$$S^{\perp} = \bigcap_{x \in S} x^{\perp}$$

$$H = \mathrm{Vect}(v_1, \dots v_s) \qquad H^{\perp} = \bigcap_{i=1}^{s} v_i^{\perp}$$

engendré par