$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

1. $t \mapsto \underbrace{t^{x-1}(1-t)^{y-1}}_{g_{x,y}(t)}$ λ-intégrable sur $]0;1[$?

$x>0,\ y>0$

On a $g_{x,y} \geq 0$ et $g_{x,y}$ continue sur $]0;1[$

↳ borélienne

donc g possède une intégrale

• On suppose $x \geq y$:

$$\int_{]0;1[} g_{x,y}(t)\, d\lambda(t) \leq \int_{]0;1[} \underbrace{t^{x-1}(1-t)^{x-1}}_{[t(1-t)]^{x-1}}\, d\lambda(t)$$

car la fonction $s \mapsto t^s$ décroissante sur $]0;1[$.

Puis la fonction $t \mapsto t(1-t)$ admet un maximum en $t = 1/2$ qui vaut $1/4$ donc

$$\int_{]0;1[} g_{x,y}\, dt \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} \text{ quand } x \geq y$$

Le cas $x \leq y$ est similaire.

Conclusion : $\forall x,y > 0$, $\underline{g_{x,y} \text{ est intégrable sur }]0;1[}$

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt$$

fonction bêta de Euler

2. Soient $x, y > 0$.

$$I = \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} t^{x-1} s^{y-1} e^{-(t+s)}\, d\mu_2(s,t)$$

$ds\,dt = d\mu \otimes \mu(s,t) = d\mu_2(s,t)$

Calculer I avec chang^t de variables $\begin{cases} u = t \\ v = t+s \end{cases}$

$\Phi : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow U \qquad \Phi(t,s) = (t, t+s)$

(correspond à Φ^{-1} de l'énoncé)

avec $V = \{(u,v) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mid v > u\}$

Φ est un C^1-difféo.
- C^1 ok
- Φ bijective : inverse $(u,v) \mapsto (u, v-u)$
- $J_\Phi = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$

<u>Th</u> de <u>changt de base</u> :

$$I = \int_V u^{x-1}(v-u)^{y-1} e^{-v} \, du dv \quad \boxed{\begin{array}{l} u \in \mathbb{R}_+^* \\ v > u \end{array}}$$

<u>Tonelli</u>

$$= \int_{]0;+\infty[} e^{-v} \left(\int_{]0;v[} u^{x-1} \underbrace{(v-u)^{y-1}}_{= v^{y-1}(1-u/v)^{y-1}} du \right) dv$$

$$= \int_{]0;+\infty[} e^{-v} v^{y-1} \left(\int_{]0;v[} u^{x-1} (1-u/v)^{y-1} du \right) dv$$

On considère $\Psi :]0;v[\to]0;1[$

$(w =) \quad \Psi(u) = u/v$

Ψ est un C^1-difféo et $J_\varphi = 1/v$

donc $\displaystyle\int_{]0;v[} u^{x-1}(1-u/v)^{y-1}\,du$

$\shortparallel$

$\displaystyle\int_{]0;1[} (wv)^{x-1}(1-w)^{y-1}\,v\,dw$

Rappel: $B(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$

$= v^x \displaystyle\int_{]0;1[} w^{x-1}(1-w)^{y-1}\,dt = v^x B(x,y)$

justifier $IR = IL$

d'où finalement $I = \displaystyle\int_{]0;+\infty[} e^{-v} v^{y-1} v^x \cdot dv \times B(x,y)$

$$I = B(x,y) \underbrace{\int_{]0;+\infty[} e^{-v} v^{x+y-1}\,dv}_{\Gamma(x+y)}$$

donc $I = B(x,y)\,\Gamma(x+y)$

3. Calculer I d'une autre manière

$$I = \int_{\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+} t^{x-1} s^{y-1} e^{-(t+s)}\,ds\,dt$$

$$= \int\int t^{x-1} s^{y-1} e^{-t} e^{-s}\,ds\,dt$$

$$\overset{\text{(Tonelli)}}{=} \int t^{x-1} e^{-t}\,dt \times \int s^{y-1} e^{-s}\,ds$$

$$= \Gamma(x)\ \Gamma(y)$$

Conclusion : $$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} 1/n^s \qquad s>1$$