

$$F(y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2 y}}{1+x^2} dx \quad \text{Int. de Riemann}$$

1. Montrer F continue

• $\mathbb{R} = \mathbb{I} \cup \mathbb{J}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2 y}}{1+x^2} dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$y \geq 0$
fonction continue ≥ 0

[fonction continue + $\mathbb{R}$ conv. abs. $\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2 y}}{1+x^2} dx = \int_{[0; +\infty[} \frac{e^{-x^2 y}}{1+x^2} dx$]

$$\left[\arctan x \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

• On applique le th. de dom.

2. Calculer $F(0)$ et $\lim_{y \rightarrow +\infty} F(y)$

$$F(0) = \pi/2$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} F(y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{[0; +\infty[} \frac{e^{-x^2 y}}{1+x^2} dx$$

$$= \int \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x^2 y}}{1+x^2} dx \quad \text{par conv. dominée}$$

$$\text{or } \lim_{y \rightarrow +\infty} e^{-x^2 y} = 0$$

$$\text{donc } \lim_{y \rightarrow +\infty} F(y) = 0$$

3. Montrer F dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

• théorème de conv. $\odot$

4. Montrer F solution d'une éqn. diff. du 1^{er} ordre

$$\text{avec } I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

$$\text{On calcule } F'(y) = \int_{[0, +\infty[} \frac{-x^2 e^{-x^2 y}}{1+x^2} dx$$

$$= \int_{[0, +\infty[} \frac{-(1+x^2) e^{-x^2 y}}{1+x^2} dx + \int_{[0, +\infty[} \frac{e^{-x^2 y}}{1+x^2} dx$$

$$= - \int_{0 \text{ à } +\infty} e^{-x^2 y} d\omega + F(y)$$

↑ changer de variable $u^2 = x^2 y$

$$F'(y) = - \frac{1}{\sqrt{y}} I + F(y)$$

5. Expression de $F(y)$ pour $y > 0$.

On résout par variation de la constante :

$$F(y) = I \cdot \int_{0 \text{ à } +\infty} \frac{e^{y-t}}{\sqrt{t}} d\omega(t)$$

6. En déduire I

$$\text{On a } F(0) = I \int_{0 \text{ à } +\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} d\omega(t)$$

change de
variable

$$u = \sqrt{t}$$

$$\int_{-\infty + i0}^{\infty + i0} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dS(t) = 2I$$

donc $F(0) = 2I^2$

$$\frac{\pi}{2}$$

$$d'où $I = \sqrt{\pi}/2$$$