(X,d) métrique $\quad x\in X \quad r>0$

1. Montrer $B_f(x,r)$ est un fermé de X

$B_f(x,r)$ fermé $\iff X\setminus B_f(x,r) = \complement_X B_f(x,r)$ ouvert

$$X\setminus B_f(x,r) = \{y\in X : d(x,y)>r\}$$

Soit $a\in X\setminus B_f(x,r)$. On montre qu'il existe $\delta>0$ tel que $B(a,\delta)\subseteq X\setminus B_f(x,r)$

On pose $d(a,x)=r+\varepsilon$ avec $\varepsilon>0$ (puisque $d(a,x)>r$)

et on pose $\delta=\varepsilon/2$

Soit $y\in B(a,\delta)$, on suppose $y\in B_f(a,r)$

$$d(a,x)\leq d(a,y)+d(y,x) < \varepsilon/2+r$$

$r \neq \varepsilon$ contradiction

$\overset{\circ}{A}$

$=$

2. Intérieur (A) = plus grand ouvert dans A

Adhérence (A) = plus petit fermé contenant A

$\|$

$\overline{A}$

$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{\substack{V \text{ ouvert} \\ V \subseteq A}} V \quad \overline{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ fermé} \\ A \subseteq F}} F$

- $\overline{B}(x,r) \subseteq B_f(x,r)$?

On a $B(x,r) \subseteq B_f(x,r)$ & $B_f(x,r)$ fermé

donc $\overline{B(x,r)} \subseteq B_f(x,r)$

- $B(x,r) \subseteq \overset{\circ}{B_f}(x,r)$?

On a $B(x,r) \subseteq B_f(x,r)$ & $B(x,r)$ ouvert

donc le résultat

3. X evn (démonstration sur le site)

4. On peut avoir $\overline{B(x,r)} \neq B_f(x,r)$

$\overset{\circ}{B_f}(x,r) \neq B(x,r)$

(X, d) d distance triviale

$\{x, y\}$

$$B(x, 1) = \{x\}$$

$$B_f(x, 1) = \{x, y\}$$

$$\overline{B(x, 1)} = \{x\} = B_f(x, 1/2)$$

donc $\overline{B(x, 1)} \neq B_f(x, 1)$