G ordre 12 $12 = 2^2 \times 3$

1. n_2 et n_3 ?

$n_2 \equiv 1 \ (2)$ et $n_2 | 3 \Rightarrow n_2 = 1$ ou 3

$n_3 \equiv 1 \ (3)$ et $n_3 | 4 \Rightarrow n_3 = 1$ ou 4

2. G abélien $\Leftrightarrow n_2 = 1$ et $n_3 = 1$ $\quad P_2 \cap P_3 = \{e\}$

$G = P_2 P_3$

$\boxed{\Leftarrow}$ P_2 d'ordre 4 $\to G = P_2 \times P_3$

P_3 d'ordre 3

2.1 / 2.2 $\quad P_2 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$P_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

$G \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \overset{TRC}{\simeq} \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ cyclique

$G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \underbrace{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}_{TRC} \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

3. G non abélien

3_Sylow : 2 élts d'ordre 3

Supposons $n_3 \neq 1 \Rightarrow n_3 = 4$

3_Sylow $\cap$ 3_Sylow' $= \{e\}$

éléments d'ordre 3 : $4 \times 2 = 8$

élément d'ordre 1 : 1

éléments d'ordre 2 ou 4 : 3 $\rightarrow n_2 = 1$

4. $\underline{n_3 = 4}$ $\quad G \circlearrowright \{3\text{-Sylow}\}$ conj.

4.1. P 3_Sylow de G

$\mathrm{Stab}(P) = \{g \in G : gPg^{-1} = P\} \supseteq P$

$$4 = |\Omega_P| = \frac{|G| = 12}{|\mathrm{Stab}(P)| = 3} \Rightarrow \mathrm{Stab}(P) = P$$

car les 3_Sylow sont conjugués 2 à 2

4.2 Noyau $= \bigcap_{P \text{ 3\_Sylow}} \mathrm{Stab}(P) = \{e\}$

3_Sylow $\{P_1, \ldots, P_4\}$ $\quad g \mapsto \sigma_g \in S_4$

$gP_ig^{-1} = P_{\sigma_g(i)}$ $\quad$ morphisme injectif donc $G \simeq$ iso. à sous-groupe $\underbrace{\text{d'ordre } 12 \text{ de } S_4}_{= A_4}$

d'où $G \simeq A_4$

5. $n_3 = 1 \Rightarrow n_2 = 3$

$\downarrow$

3-Sylow distingué P

$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

2-Sylow $Q \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

ou $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

$P \cap Q = \{e\}$

$G = PQ \qquad P \triangleleft G$

$\rightarrow G = P \rtimes Q$