Exercice. $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{e^x - 1}$ $x \in]0; +\infty[$

1. Montrer f est Lebesgue-intégrable sur $]0; +\infty[$

Il faut trouver g intégrable avec $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall x > 0$.

ou montrer $\displaystyle\int_{]0;+\infty[} |f(x)| < +\infty$

On a $|\sin(x)| \leq x$ $\forall x \geq 0$

$$e^x - 1 \geq x \quad \forall x \geq 0$$

$$e^x - 1 \geq e^{x-1} \quad \forall x \geq 2$$

$$\int_{]0;+\infty[} \left| \frac{\sin(x)}{e^x - 1} \right| d\lambda(x) \leq \int_{]0;2]} + \int_{[2;+\infty[}$$

$$\leq \int_{]0;2]} \frac{x}{x} \, d\lambda(x)$$

$$+\int_{[2;+\infty[} \frac{1}{e^{x-1}}\, d\lambda(x)$$

$\mathbb{I}L = \mathbb{I}R$

$$\leqslant 2 + \int_2^{+\infty} e^{1-x}\, dx = 2 + e^{-1}$$

donc f est intégrable

2. Montrer $\forall x > 0$, $f(x) = \sum_{n \geqslant 1} e^{-nx} \sin(x)$

et pour $x \leq 0$?

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{e^x - 1} = \frac{\sin(x)}{e^x(1 - e^{-x})} = e^{-x} \frac{\sin(x)}{1 - e^{-x}}$$

avec $e^{-x} < 1$

d'où $f(x) = e^{-x} \sin(x) \sum_{n \geqslant 0} (e^{-x})^n$

$$= \sin(x) \sum_{n \geqslant 1} e^{-nx}$$

Pour $x = 0$: $f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{e^x - 1}$

$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos(x)}{e^x} = 1$

mais $\sin(0) \sum_{n \geq 1} e^{-n.0} = 0$

3. En deduire $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^x - 1} dx = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + 1}$

On considère $\sum_{n \geq 1} \int_{[0;+\infty[} \left| \sin(x) e^{-nx} \right| d\lambda(x)$

Majorer $|\sin(x)| \leq 1$ ne donne pas une série convergente (à cause du côté 0), on majore plutôt $|\sin(x)| \leq x \quad \forall x \geq 0$.

$\sum_{n \geq 1} \int_{[0;+\infty[} \left| \sin(x) e^{-nx} \right| d\lambda(x)$

$$\leq \sum_{n\geq 1} \int_{[0;+\infty[} x e^{-nx} \, d\lambda(x)$$

$$\leq \sum_{n\geq 1} \int_{0}^{+\infty} x e^{-nx} \, dx$$ car continue et ≥ 0

intégration par partie

$$\leq \sum_{n\geq 1} 1/n^2 < +\infty$$

donc la série $\sum \int f_n$ converge absolument

et donc $$\int_{[0;+\infty[} f = \sum_{n\geq 1} \int_{[0;+\infty[} e^{-nx} \sin(x) \, d\lambda(x)$$

Mais $$\int_{[0;+\infty[} e^{-nx} \sin(x) \, d\lambda(x) = \int_{0}^{+\infty} e^{-nx} \sin(x) \, dx$$

continue + int. de Riemann converge abs. (cf. cidesin)

et par double IPP, on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx} \sin(x)\,dx = \frac{1}{n^2+1}$$

On peut aussi faire

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx} \sin(x)\,dx = \operatorname{Im} \int_0^{+\infty} e^{-nx} e^{ix}\,dx$$

$$= \operatorname{Im} \int_0^{+\infty} e^{(i-n)x}\,dx = \operatorname{Im} \left[\frac{1}{i-n} e^{(i-n)x} \right]_0^{+\infty}$$

$$= \operatorname{Im}\left(\frac{-1}{i-n} \right) = \frac{1}{n^2+1}$$