Equations différentielles

§2.1 Equations différentielles – Premiers résultats

Définition

Une équation différentielle (résolue d'ordre 1) est une equation en la fonction y de la forme

$$y'(t) = f(t, y(t)), \ t \in I \qquad \text{(E)}$$

où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, U ouvert de $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$, $f : I \times U \to \mathbb{R}^d$ continue. f est le champ de vecteurs de (E).

Une solution de E est (y, J) avec J ouvert contenue dans I, $y : J \to \mathbb{R}^d$ dérivable avec, $\forall t \in J$, $y(t) \in U$ avec $f(t, y(t)) = y'(t)$. La solution est globale si $I = J$. La solution est maximale s'il n'existe pas de solution $(\tilde{y}, \tilde{J})$ avec $J \subsetneq \tilde{J}$ et $\tilde{y}(t) = y(t)$ pour tout $t \in J$.

Si $f(t, y(t)) = f(y(t))$ alors l'équation est autonome

Théorème

Toute solution se prolonge en une solution maximale (mais pas nécessairement de manière unique)

Réduction à l'ordre 1.

$y : I \to U \subseteq \mathbb{R}^d$

L'équation différentielle d'ordre n

$$y^{(n)} = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}), \quad t \in I \qquad (1)$$

avec $f : I \times U^n \to \mathbb{R}^d$ est équivalente à l'équation d'ordre 1

$$\boxed{Y'(t) = F(t, Y(t)), \quad t \in I} \qquad (2)$$

avec Y à valeurs dans $(\mathbb{R}^d)^n \cong \mathbb{R}^{dn}$ et

$x_i \in \mathbb{R}^d$

$$F(t, X) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ f(t, X) \end{pmatrix} \quad \text{pour } X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}^d)^n$$

La solution y correspondant à la solution $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$.

(1) (2)

Théorème (équations linéaires d'ordre 1)

On considère l'équation

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t), \;\; t \in I \qquad \text{(E)}$$

avec I intervalle ouvert, $a, b : I \to \mathbb{R}$ continues. Soit $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Alors a admet une unique primitive A qui s'annule en t_0 donnée par

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds$$

L'équation homogène $\boxed{y'(t) = a(t)y(t)}$ admet une unique solution globale vérifiant $y(t_0) = y_0$ ~~donnée par~~

$$\boxed{y(t) = y_0\, e^{A(t)}}$$

L'équation (E) admet une unique solution globale vérifiant $y(t_0) = y_0$ donnée par

$$y(t) = y_0\, e^{A(t)} + \int_{t_0}^{t} e^{A(t)-A(s)} b(s)\, ds$$

formule de Duhamel

Equations différentielles linéaires du premier order

$$y'(t) = a(t)y(t) + f(t), \quad t \in I \tag{1}$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $a : I \to \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues sur I données, et $y : I \to \mathbb{R}$ est la fonction inconnue.

1. Soit $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction y définie sur I par :

$$\forall t \in I, \; y(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{s}^{t} a(\sigma)d\sigma} f(s)ds \tag{2}$$

   est solution de (1) sur I et vérifie $y(t_0) = y_0$.
2. Retrouver cette formule (formule de Duhamel) en utilisant la méthode de variation de la constante.
3. Donner la solution maximale au problème suivant

$$\begin{cases} y'(t) + \dfrac{y(t)}{t^2} = -\dfrac{1}{t^3}, \; t \in]0, +\infty[\\ y(1) = 1 \end{cases}$$