
Feuille d'exercices n° 5

CONTINUITÉ, DÉRIVABILITÉ

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, déterminer les domaines de définition de $f \circ g$ et $g \circ f$, puis calculer $f \circ g$ et $g \circ f$.

1. $f : \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2 - 3$.
2. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2 + 3x - 5$ et $g : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.

Exercice 2. On considère les deux fonctions suivantes :

$$u : \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \ln(1+x) \end{array} \quad \text{et} \quad v : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \sin x \end{array}.$$

On note $f = v \circ u$ et $g = u \circ v$.
Justifier que f et g sont définies au voisinage de 0.

Exercice 3. Pour chacune des propositions, décider si elle est vraie ou fausse. Justifier.

1. Si f est croissante sur $\mathbf{R}$, alors pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on a : $x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$.
2. Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction. Si f^2 est continue sur I alors f est continue sur I.
3. Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction. Si f^3 est continue sur I alors f est continue sur I.
4. Une fonction dérivable de dérivée strictement négative est strictement décroissante.

Exercice 4. *Extrait CAPES 2014*

1. Soit a et b deux réels tels que $a < b$. On note $I = [a, b]$. Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction. On rappelle qu'un *point fixe* de f est un réel $x \in I$ tel que $f(x) = x$.
   (a) La continuité de la fonction f est-elle une condition nécessaire à l'existence d'un point fixe ?
   (b) La continuité de la fonction f est-elle une condition suffisante à l'existence d'un point fixe ?
2. Dans cette question, on considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par : $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = e^{-x}$.
   Démontrer que la fonction f admet un unique point fixe sur l'intervalle $I = [0, 1]$. *On pourra étudier la fonction auxiliaire g définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = f(x) - x$.*
3. Soit a et b deux réels tels que $a < b$. On note $I = [a, b]$. Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue telle que $f([a, b]) \subset [a, b]$.
   (a) Démontrer que f possède un point fixe sur $[a, b]$.
   (b) Dans cette question, on suppose de plus que f est strictement décroissante sur $[a, b]$. Cette hypothèse supplémentaire est-elle suffisante pour assurer l'unicité du point fixe ?
   (c) Dans cette question, on suppose maintenant que f est strictement croissante sur $[a, b]$. Cette hypothèse supplémentaire est-elle suffisante pour assurer l'unicité du point fixe ?

Exercice 5. Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue.

1. On suppose que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) > 0$. Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geq k$.
2. Le résultat de la question précédente est-il toujours vrai si f est définie sur $\mathbf{R}$. Justifier.

Exercice 6.

1. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue qui admet des limites finies en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que f est bornée sur $\mathbf{R}$.
2. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbf{R}$.

Exercice 7. Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer les dérivées d'ordre n des fonctions f et g définies pour tout réel $x \in]-1,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \text{ et } g(x) = (1+x)^\alpha \text{ où } \alpha \in \mathbf{R}.$$

Exercice 8. On considère $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

1. Justifier que f est dérivable et calculer sa dérivée.
2. Donner l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0.

Exercice 9. Déterminer en quels points les fonctions qui suivent sont dérivables, et donner leur dérivée.

1. $f_1 :]1,+\infty[\to \mathbf{R}$, $x \longmapsto \ln(\ln x)$.
2. $f_2 : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$, $x \longmapsto e^{\frac{1}{x}} (\cos(x))^5$.
3. $f_3 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x^2+1}-2}{\sqrt{x^2+1}+2}$
4. $f_4 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \longmapsto (x^2+1)\, 2^x$.

Exercice 10. Démontrer à l'aide du théorème des accroissements finis les inégalités suivantes :

1. pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|\sin x| \leq |x|$;
2. pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\quad 1 - \cos x \leq x$.

Exercice 11. Déterminer en quels points les fonctions suivantes sont dérivables et calculer leur dérivée.

1. $f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \ x \mapsto (1+|x|)e^{-|x|}$;
2. $f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{sinon} \end{cases}$.

Exercice 12. On définit $f : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}, \ x \mapsto x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Démontrer que f peut se prolonger par continuité sur $\mathbf{R}$. Dans la suite, on notera f ce prolongement.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.
3. Montrer que f n'est pas deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$.
4. Justifier que $f(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^2)$.

__Exercice 13.__

Dans cet exercice, on étudie quelques propriétés des fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui vérifient la condition $(\star)$:

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x+y) = f(x)f(y).$$

1. **Premières propriétés.** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui vérifient la condition $(\star)$.
   (a) Quelles sont les valeurs possibles de $f(0)$?
   (b) Montrer que f est positive.
   (c) Démontrer que :
   $$\forall n \geq 2,\ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n,\ f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i).$$
2. **Détermination de l'ensemble des solutions continues de $(\star)$.**
   Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui vérifient la condition $(\star)$.
   (a) Démontrer que si f s'annule au moins une fois alors f est identiquement nulle.

   Dans la suite de cette partie, on suppose que f ne s'annule pas et on pose $a = f(1)$.

   resume Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = a^n$.

   resume En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $f(n) = a^n$.

   resume Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $f\left(\frac{1}{n}\right) = a^{1/n}$.

   resume Montrer que, pour tout $r \in \mathbf{Q}$, $f(r) = a^r$.

   resume On suppose que f est continue, montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = a^x$.

   resume Donner l'ensemble des fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue qui vérifient $(\star)$.
3. **Quelques résultats de régularité.** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui vérifient la condition $(\star)$.
   (a) Montrer que, si f est continue en un point $x_0 \in \mathbf{R}$, alors f est continue sur $\mathbf{R}$.
   (b) Montrer que, si f est dérivable en un point $x_0 \in \mathbf{R}$, alors f est dérivable sur $\mathbf{R}$.
   (c) Montrer que, si f est continue sur $\mathbf{R}$, alors f est dérivable sur $\mathbf{R}$.
   Indication : après avoir justifier son existence, on pourra noter F la primitive de f qui s'annule en 0 et, à x fixé, intégrer la condition $(\star)$ par rapport à y entre 0 et t , où $t \in \mathbf{R}$.
4. **Équivalence entre $(\star)$ et une équation différentielle.**
   Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction non nulle et dérivable sur $\mathbf{R}$. On veut montrer que : f vérifie la condition $(\star)$ si et seulement si $f(0) = 1$ et, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = f'(0)f(x)$.
   (a) Démontrer d'abord le sens direct.
   (b) On suppose que $f(0) = 1$ et que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = f'(0)f(x)$.
      i. En utilisant $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto f(x)f(-x)$, démontrer que f ne s'annule jamais.
      ii. Pour tout $y \in \mathbf{R}$, on considère $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \dfrac{f(x+y)}{f(x)}$. Utiliser h pour montrer que f vérifie $(\star)$.