# Séries numériques

Dans tout le cours $\mathbb{K}$ est le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ ou celui des nombres complexes $\mathbb{C}$ et $|\cdot|$ est la valeur absolue ou le module.

## 1 Définitions et convergence des séries numériques

### 1.1 Définition et vocabulaire

**Définition 1.1.** *Pour tout $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on appelle série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

*On en déduit que : $\forall n \geq 1$, $u_n = S_n - S_{n-1}$.*

**Notations - Vocabulaire :**

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelé *terme général* de la série.
2. $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la *suite des sommes partielles* de la série et pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n$ est la *somme partielle d'ordre $n$*.
3. La série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se note $\sum u_n$, mais attention il s'agit d'une notation et non d'une somme.

### 1.2 Convergence et divergence d'une série

**Définition 1.2.** *Soit $\sum u_n$ une série à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que $\sum u_n$ converge si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{K}$.*

*Quand la série $\sum u_n$ converge, la limite $S$ de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée* somme *de la série et est notée $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ .*

**Remarque 1.1.** *Attention, la notation $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ signifie $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n$. Avant d'écrire la somme de la série, il faut donc s'assurer de sa convergence.*

**Définition 1.3.**

1. *Une série qui ne converge pas est dite divergente.*
2. *Soit $\sum u_n$ une série convergente. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on appelle* reste d'ordre $N$ *de la série*

$$R_N = S - S_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n = \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=N+1}^{m} u_n$$

3. *Deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont dites de* même nature *si elles sont toutes les deux convergentes ou bien toutes les deux divergentes.*
   *Étudier une série, c'est déterminer si elle est convergente ou divergente.*

**Remarque 1.2.**

1. *Ne jamais parler du reste d'une série divergente.*
2. *Soit $\sum u_n$ une série convergente de somme $S$, alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $R_N = S - S_N$, par conséquent, $R_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$.*

**Exemple 1.1.** *Une série télescopique.*
*On considère* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et on note* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite des sommes partielles de la série* $\sum u_n$.
✎ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $S_n$, puis en déduire la nature de la série.

...........................................................................................................

...........................................................................................................

...........................................................................................................

Il s'agit d'un cas assez exceptionnel pour lequel on sait calculer les sommes partielles, les critères de convergence des suites s'appliquent donc. Mais en général, il faut avoir des résultats spécifiques à la convergence des séries.

**Proposition 1.1.** *Soit* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries convergentes à valeurs dans* $\mathbb{K}$. *Alors, pour tout* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, *la série* $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ *converge et de plus :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

*Démonstration.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n(\lambda u + \mu v) = \lambda S_n(u) + \mu S_n(v)$, où $S_n(u)$ désigne la somme partielle d'ordre $n$ de $\sum u_n$. Les résultats sur les opérations sur les suites convergentes permettent de conclure.

□

**Proposition 1.2.** *Soit* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à valeurs dans* $\mathbb{K}$.

1. *Si* $\sum u_n$ *diverge alors, pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}^\star$, $\sum \lambda u_n$ *diverge.*
2. *Si* $\sum u_n$ *converge et* $\sum v_n$ *diverge alors* $\sum(u_n + v_n)$ *diverge.*

*Démonstration.*

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^\star$, si par l'absurde $\sum \lambda u_n$ converge, alors par la proposition précédente $\sum \frac{1}{\lambda}(\lambda u_n) = \sum u_n$ converge, ce qui est absurde.
2. Si par l'absurde $\sum(u_n + v_n)$ converge, on écrit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n + v_n - u_n$. Or $\sum(u_n + v_n)$ et $\sum u_n$ convergent, donc $\sum v_n$ converge ce qui est contradictoire.

□

**Remarque 1.3.** *On ne peut rien dire de la somme de deux séries divergentes. En effet,* $\sum(n-n)$ *est convergente mais* $\sum(n+n)$ *est divergente.*

**Proposition 1.3.** *Soit* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres complexes, on pose pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $z_n = x_n + iy_n$, *où* $x_n \in \mathbb{R}$ *et* $y_n \in \mathbb{R}$. *Alors la série* $\sum z_n$ *converge si et seulement si les deux séries* $\sum x_n$ *et* $\sum y_n$ *convergent et dans ce cas :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} y_n$$

*Démonstration.* D'après les résultats vus sur les suites de nombres complexes, $(S_n(z))_{n\in\mathbb{N}} = (S_n(x) + iS_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, d'où le résultat. □

## 1.3 Premiers critères de convergence sur les séries

**Proposition 1.4** (Condition nécessaire de convergence). *Si* $\sum u_n$ *est une série convergente alors* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

*Démonstration.* ✎ ...........................................................................................

...........................................................................................................

□

**Remarque 1.4.**

1. *La réciproque est fausse (penser à la série $\sum \frac{1}{n}$ sur laquelle on reviendra).*
2. *Ce résultat donne un moyen de montrer qu'une série est divergente : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $0$ alors $\sum u_n$ diverge.*

**Exemple 1.2.** $\sum(-1)^n$ *diverge,* $\sum \sqrt{n}$ *diverge…*

**Proposition 1.5** (Critère de Cauchy)**.** *Soit $\sum u_n$ une série à valeurs dans $\mathbb{K}$. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall m > n \geq N$, $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{m} u_k\right| \leq \varepsilon$ .*

*Démonstration.* On applique le critère de Cauchy à la suite des sommes partielles de la série :

$$\begin{aligned}\sum u_n \text{ converge } &\iff (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge } \iff (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite de Cauchy}\\ &\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall m > n \geq N,\ |S_m - S_n| \leq \varepsilon\\ &\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall m > n \geq N,\ \left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k\right| \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

□

**Exemple 1.3.**
*On considère la série de terme général $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont on note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des sommes partielles. Montrons d'abord que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

*Or, pour tout $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$, ainsi :*

$$S_{2n} - S_n \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \times n = \frac{1}{2}.$$

*D'où : $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists n \geq N$, $S_{2n} - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$. Donc $\sum \frac{1}{n}$ ne vérifie pas le critère de Cauchy, ainsi elle diverge.*

## 1.4 Convergence absolue

**Définition 1.4.** *Soit $\sum u_n$ une série à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que $\sum u_n$ est* absolument convergente *si la série $\sum |u_n|$ converge.*

**Proposition 1.6.** *Toute série absolument convergente est convergente.*

*Démonstration.* Soit une série $\sum u_n$ absolument convergente. Comme $\sum |u_n|$ converge, elle vérifie le critère de Cauchy. Ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall m \geq n \geq N,\ \left|\sum_{k=n+1}^{m} |u_k|\right| \leq \varepsilon.$$

Soit $m > n \geq N$, on a :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |u_k| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} |u_k|\right| \leq \varepsilon.$$

Donc $\sum u_n$ vérifie le critère de Cauchy, par conséquent, elle converge.

□

**Remarque 1.5.**

1. *Ce résultat donne une méthode pour se ramener à des séries à termes positifs.*
2. *La réciproque de cette proposition est fausse.*
   *Par exemple, on considère la série de terme général* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} = \left(\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.
   - *Cette série n'est pas absolument convergente car la série* $\sum \frac{1}{n}$ *diverge.*
   - *On justifiera à la fin du cours qu'il s'agit une série convergente (critère des séries alternées).*

**Définition 1.5.** *Soit* $\sum u_n$ *une série convergente telle que* $\sum |u_n|$ *diverge, alors la série* $\sum u_n$ *est dite* semi-convergente.

## 2 Un premier exemple : les séries géométriques

Il s'agit d'un exemple pour lequel les sommes partielles peuvent être calculées.

**Définition 2.1.** *Pour tout* $a \in \mathbb{C}$*, la série de terme général* $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est appelée* série géométrique.

**Proposition 2.1.** *Soit* $a \in \mathbb{C}$*, la série* $\sum a^n$ *converge si et seulement si* $|a| < 1$ *et dans ce cas :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$$

*Démonstration.* ✎ *Faire la preuve en commençant par le cas où* $a = 1$.

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

□

**Exemple 2.1.** ✎ Déterminer la nature de la série $\sum (1/2)^n$ et, le cas échéant, calculer sa somme.

..........................................................................................................

## 3 Séries à termes positifs

**Définition 3.1.** *On dit que la série* $\sum u_n$ *est à termes positifs si :* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{R}_+$.

**Remarque 3.1.**

1. *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est positive à partir d'un certain rang, les résultats de ce paragraphe sont encore vrais.*
2. *La convergence d'une série* $\sum u_n$ *à termes négatifs est équivalente à la convergence de la série* $\sum(-u_n)$ *qui est à termes positifs. Ainsi les résultats de ce paragraphe permettent d'étudier les séries dont le terme général est de signe constant (à partir d'un certain rang).*
3. *Les critères de convergence pour les séries à termes positifs permettent aussi d'étudier la convergence absolue.*

## 3.1 Propriété importante des séries à termes positifs

**Théorème 3.1.** *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Alors la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.*

*Démonstration.* ✎ ..........................................................................................

..........................................................................................................

□

## 3.2 Critères de comparaison

En utilisant le théorème 3.1 on démontre le résultat suivant :

**Proposition 3.1.** *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.*
*On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $u_n \leq v_n$.*

1. *Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.*
2. *Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.*

**Exemple 3.1.** ✎ Étudier la nature des séries $\sum \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{(n+1)n}$.

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

**Exemple 3.2.** ✎ Étudier la nature des séries $\sum \frac{\cos n}{2^n}$ et $\sum \frac{\sin n}{2^n}$.

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

## 3.3 La règle de D'Alembert

**Proposition 3.2.** *Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in [0, +\infty]$.

1. *Si $\ell < 1$ la série $\sum u_n$ converge.*
2. *Si $\ell > 1$ la série $\sum u_n$ diverge.*

*Démonstration.* L'idée de la preuve est de comparer la série à une série géométrique.

1. Si $\ell < 1$, on choisit $\lambda$ tel que $\ell < \lambda < 1$.
   Montrons d'abord qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \lambda$.
   Posons $\varepsilon = \lambda - \ell > 0$, comme $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \ell\right| \leq \varepsilon$.
   Ainsi, pour tout $n \geq n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ell + \varepsilon = \lambda$.
   On va maintenant en déduire que : $\forall n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq \lambda^{n-n_0+1} u_{n_0}$.
   On raisonne par récurrence.
   • D'après ce qui précède $\dfrac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \leq \lambda$, d'où $u_{n_0+1} \leq \lambda u_{n_0}$ car $u_{n_0} > 0$, le résultat est donc vrai pour $n = n_0$.
   • Soit $n \geq n_0$ tel que $u_{n+1} \leq \lambda^{n-n_0+1} u_{n_0}$.
   Or $\dfrac{u_{n+2}}{u_{n+1}} \leq \lambda$, comme $u_{n+1} > 0$ on a :

$$u_{n+2} \leq \lambda u_{n+1} \leq \lambda \times \lambda^{n-n_0+1} u_{n_0} = \lambda^{n-n_0+2} u_{n_0}.$$

Donc : $\forall n \geq n_0,\ u_{n+1} \leq \lambda^{n-n_0+1} u_{n_0}$.
Pour conclure, on utilise le premier théorème de comparaison. Les séries sont à termes positifs et $\sum \lambda^n$ est une série géométrique convergente, donc, par comparaison, $\sum u_n$ converge.

2. Si $\ell > 1$, on choisit $\lambda$ tel que $\ell > \lambda > 1$. Comme $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq \lambda$ (prendre $\varepsilon = \ell - \lambda > 0$ dans la définition de la convergence).
Ainsi : $\forall n \geq n_0,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_{n_0}} \geq \lambda^{n-n_0+1}$ ou encore $u_{n+1} \geq \lambda^{n-n_0+1} u_{n_0}$.
Les séries sont à termes positifs et $\sum \lambda^n$ est une série géométrique divergente, donc, par comparaison, $\sum u_n$ diverge.

□

**Remarque 3.2.** *La règle de d'Alembert ne permet pas de conclure quand $\ell = 1$.*
✎ Essayer, par exemple, de l'appliquer aux séries de terme général $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(1/n^2)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

## 3.4 La règle de Cauchy

**Proposition 3.3.** *Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell \in [0, +\infty]$.*

1. *Si $\ell < 1$ la série $\sum u_n$ converge.*
2. *Si $\ell > 1$ la série $\sum u_n$ diverge.*

*Démonstration.* Comme pour la règle de d'Alembert, on compare la série à une série géométrique.

1. Si $\ell < 1$, on choisit $\lambda$ tel que $\ell < \lambda < 1$. Comme $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\sqrt[n]{u_n} \leq \lambda$ (prendre $\varepsilon = \lambda - \ell$ dans la définition de la convergence).
Ainsi : $\forall n \geq n_0,\ 0 < u_n \leq \lambda^n$, comme $\sum \lambda^n$ converge, par comparaison, $\sum u_n$ converge.
2. Si $\ell > 1$, on choisit $\lambda$ tel que $\ell > \lambda > 1$. Comme $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\sqrt[n]{u_n} \geq \lambda$ (prendre $\varepsilon = \ell - \lambda$ dans la définition de la convergence).
Ainsi : $\forall n \geq n_0,\ u_n \geq \lambda^n$, comme $\sum \lambda^n$ diverge, par comparaison, $\sum u_n$ diverge.

□

**Remarque 3.3.** *La règle de Cauchy ne permet pas de conclure quand $\ell = 1$.*
✎ Essayer, par exemple, de l'appliquer aux séries de terme général $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(1/n^2)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

**Exemple 3.3.** ✎ Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(\dfrac{n+1}{2n+5}\right)^n$. Étudier la nature de la série $\sum u_n$.

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

# 4 Des séries de références

## 4.1 Les séries exponentielles

**Théorème 4.1** (Définition de l'exponentielle)**.** *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente (et donc convergente) et sa somme est notée :*

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

*Démonstration.* ✎ *Utiliser la règle de D'Alembert.*

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

□

**Exemple 4.1.** *On considère la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{3^n+n2^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.*
*Pour tout $n \geq 1$, $u_n = \frac{3^n}{n!} + 2\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$, or les séries $\sum \frac{3^n}{n!}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$ convergent. Ainsi $\sum u_n$ converge comme combinaison linéaire de séries convergentes. De plus,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} = e^3 + 2e^2.$$

**Exemple 4.2.** *Étudier la nature de la série $\sum e^{-n^2}$.*
*$n^2 e^{-n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, par conséquent, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $0 \leq n^2 e^{-n^2} \leq 1$. Ainsi, pour tout $n \geq N$, $0 \leq e^{-n^2} \leq \frac{1}{n^2}$. Or la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge ($2 > 1$), par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum e^{-n^2}$ converge.*

# 5 Séries à termes quelconques : l'exemple des séries alternées

Les critères de convergence des séries à termes positifs permettent d'étudier la convergence absolue d'une série ce qui implique qu'elle converge. Mais on a parfois à étudier des séries qui ne sont pas absolument convergentes mais qui convergent (séries semi-convergentes).
Dans cette partie on étudie le cas particulier des séries alternées.

**Définition 5.1.** *Soit $\sum u_n$ une série à termes réels. On dit que $\sum u_n$ est alternée lorsque $(-1)^n u_n$ est de signe constant.*
*Ainsi $u_n$ s'écrit : $u_n = (-1)^n v_n$ ou $u_n = (-1)^{n+1} v_n$ avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq 0$.*

**Proposition 5.1** (Critère des séries alternées ou de Leibniz)**.** *Soit $\sum(-1)^n v_n$ une série alternée (pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq 0$). On suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante qui converge vers $0$.*
*Alors la série $\sum(-1)^n v_n$ converge et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste d'ordre $n$, $R_n$, vérifie $|R_n| \leq v_{n+1}$ .*

*Démonstration.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n$ la somme partielle d'ordre $n$ de la série $\sum(-1)^n v_n$.
✎ *Montrer d'abord que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.*

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

..................................................................................................................

..................................................................................................................

..................................................................................................................

..................................................................................................................

..................................................................................................................

Donc $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, elles convergent vers la même limite. Ainsi $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, c'est-à-dire que la série $\sum(-1)^n v_n$ converge.

Estimation du reste : notons $S$ la somme de la série, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2} \leq S_{2n}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, $|R_{2n}| = |S - S_{2n}| = S_{2n} - S \leq S_{2n} - S_{2n+1} = -(-1)^{2n+1}v_{2n+1} = v_{2n+1}$.
De plus, soit $n \in \mathbb{N}$, $|R_{2n+1}| = |S - S_{2n+1}| = S - S_{2n+1} \leq S_{2n+2} - S_{2n+1} = (-1)^{2n+2}v_{2n+2} = v_{2n+2}$.
Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|R_n| \leq v_{n+1}$.

□

**Exemple 5.1.** *Pour tout $\alpha > 0$, les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ sont convergentes.*

**Exemple 5.2.** ✎ Justifier que $\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n\ln n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n}$.

..................................................................................................................

✎ Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n\ln n}$ diverge.

..................................................................................................................

..................................................................................................................

..................................................................................................................

**Dans ce chapitre il faut savoir démontrer sans indication :**

— Le terme général d'une série convergente converge vers 0 (proposition 1.4) ;
— Le critère de convergence des séries géométriques (proposition 2.1) ;
— Le critère de convergence des séries à termes positifs (théorème 3.1) ;
— La convergence de la série exponentielle (théorème 4.1) ;
— Le critère de convergence des séries alternées : la convergence sans l'estimation des restes (proposition 5.1).

# 6 Pour aller plus loin (et on y reviendra...)

## 6.1 Critères de comparaison utilisant les équivalences

**Proposition 6.1.** *Soit* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes positifs.*
*On suppose que* $u_n = o(v_n)$*, alors :*

1. *Si* $\sum v_n$ *converge alors* $\sum u_n$ *converge et* $R_n(u) = o(R_n(v))$*.*
2. *Si* $\sum u_n$ *diverge alors* $\sum v_n$ *diverge et* $S_n(u) = o(S_n(v))$*.*

**Remarque 6.1.** *Ce théorème justifie l'utilisation des développements limités ou des développements asymptotiques pour étudier la nature de certaines séries.*

**Proposition 6.2.** *Soit* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes positifs telles que* $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$*. Alors* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont de même nature, de plus :*

1. *Si* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *convergent alors* $R_n(u) \underset{+\infty}{\sim} R_n(v)$*.*
2. *Si* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *divergent alors* $S_n(u) \underset{+\infty}{\sim} S_n(v)$*.*

**Exemple 6.1.** ✎ Étudier la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} = (\ln(1+1/n))_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

..................................................................................................................

..................................................................................................................

..................................................................................................................

**Remarque 6.2.** *Ne pas oublier que les séries doivent être à termes positifs pour appliquer ces résultats de comparaison.*

## 6.2 Les séries de Riemann

L'étude des séries de Riemann repose sur leur comparaison avec des intégrales. Comme on ne voit pas les intégrales dans ce cours, on ne les verra pas mais, pour votre culture, vous pouvez tout de même lire cette section.

**Proposition 6.3.** *Soit* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et décroissante. Alors, pour tout* $n \in \mathbb{N}^\star$*,*

$$\int_n^{n+1} f(t)\ dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\ dt.$$

*Démonstration.* Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, $f$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, donc sur $[n, n+1]$, ainsi, pour tout $t \in [n, n+1]$, $f(t) \leq f(n)$. On en déduit que :

$$\int_n^{n+1} f(t)\ dt \leq \int_n^{n+1} f(n)\ dt = f(n).$$

L'autre inégalité se démontre de la même manière en raisonnant sur l'intervalle $[n-1, n]$. □

**Remarque 6.3.**

1. ✎ Faire un dessin qui illustre la proposition précédente.

2. ✎ On peut énoncer un résultat analogue dans le cas où $f$ est croissante.

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

**Définition 6.1.** *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on appelle série de Riemann une série dont le terme général est* $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

**Proposition 6.4** (Convergence des séries de Riemann)**.** *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.*

1. *Si $\alpha > 1$ alors la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge.*
2. *Si $\alpha \leq 1$ alors la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.*

*Démonstration.* On commence par étudier la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha \leq 0$.
Supposons $\alpha \leq 0$, $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ ne converge pas vers 0, donc la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est divergente.
Dans la suite, on suppose donc $\alpha > 0$.
On applique maintenant la proposition précédente : la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante et continue sur $]0, +\infty[$.
Alors, pour tout $n \geq 2$,

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \ \leq \ \frac{1}{n^\alpha} \ \leq \ \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Soit $N \geq 2$, pour $\alpha \neq 1$, on déduit de l'inégalité précédente :

$$\left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_2^{N+1} = \int_2^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_1^N \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^N$$

$$\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{2^{\alpha-1}}\right) \leq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{N^{\alpha-1}} - 1\right) \qquad : (\star)$$

1. Si $\alpha > 1$, d'après $(\star)$, on a :

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{N^{\alpha-1}} \leq \frac{1}{\alpha-1}$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}$$

Ainsi les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ sont majorées, donc $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

2. Si $\alpha < 1$ alors $\alpha - 1 < 0$, d'après $(\star)$ on a :

$$\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{2^{\alpha-1}}\right) \leq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^\alpha},$$

ainsi en faisant tendre $N$ vers $+\infty$, on obtient :

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty,$$

donc la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

3. Si $\alpha = 1$, on reprend les inégalités précédentes, d'où :

$$\ln(N+1) - \ln 2 = \int_2^{N+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \leq \int_1^N \frac{dt}{t} = \ln N - \ln 1 = \ln N.$$

Ainsi $\sum\limits_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$, donc la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

$\square$

## 6.3 Les séries de Bertrand

**Définition 6.2.** *Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on appelle série de Bertrand une série dont le terme général est* $\left(\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}\right)_{n\geq 2}$.

**Proposition 6.5** (Convergence des séries de Bertrand)**.** *Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, la série de terme général $\left(\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}\right)_{n\geq 2}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).*

*Démonstration.* Admis. $\square$