Fonctions d'une variable réelle : limite

Dans la suite, on considère des fonctions f définies sur une partie de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles. On notera $\mathcal{D}_f$ le domaine de définition de f. On se limitera au cas des fonctions dont le domaine de définition est une réunion finie d'intervalles.

Dans la suite, $\overline{\mathbb{R}}$ désigne $\mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$.

1 Notions très succinctes sur la topologie de la droite réelle

1.1 Notion de voisinage

On dit que $V \subset \mathbb{R}$ est un **voisinage** du point $a \in \mathbb{R}$, ou encore que $V \in \mathcal{V}(a)$, **l'ensemble des voisinages** de a, s'il existe $h > 0$ tel que $]a-h, a+h[\subset V$, autrement dit si V contient un intervalle ouvert de centre a.

On dit que $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) (ou encore que $V \in \mathcal{V}(+\infty)$ (resp. $\mathcal{V}(-\infty)$)) s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $]A, +\infty[\subset V$ (resp. $]-\infty, A[\subset V$).

1.2 Adhérence d'un sous-ensemble de la droite réelle

L'**adhérence** $\overline{X}$ d'une partie X de $\mathbb{R}$ est définie par

$$\overline{X} = \left\{ a \in \mathbb{R} \mid \text{il existe une suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}} \text{ telle que } a = \lim_{n\to\infty} x_n \right\}.$$

Exemple 1.1. *Adhérence d'un intervalle ouvert ou semi-ouvert :* $\overline{]-\infty, a[} =]-\infty, a]$, $\overline{]a, b]} = [a, b]$, *etc.*

On dit qu'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est adhérent à une partie X de $\mathbb{R}$ s'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $a = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Exemple 1.2. *On a :* $+\infty$ *est adhérent à l'intervalle* $[0, +\infty[$ *;* 0 *est adhérent à l'ensemble* $]-1, 0[\cup]0, 2]$.

1.3 Propriété vérifiée au voisinage d'un point

On dit qu'une fonction f **possède une propriété (P) au voisinage d'un point** $a \in \overline{\mathbb{R}}$ si a est un point adhérent au domaine de définition de f et s'il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que f vérifie la propriété (P) sur l'ensemble $V \cap \mathcal{D}_f$. Notons que $V \cap \mathcal{D}_f$ contient un ensemble de la forme suivante : $]a-h, a+h[$, $]a-h, a[\cup]a, a+h[$, $]a-h, a[$, $]a, a+h[$ si a est fini, un intervalle de la forme $]A, +\infty[$ si $a = +\infty$ et un intervalle de la forme $]-\infty, A[$ lorsque $a = -\infty$.

2 Limite d'une fonction : définitions et propriétés de base

2.1 Définitions

Dans toute la suite, lorsque nous dirons qu'une fonction est définie au voisinage de a, nous sous-entendrons qu'elle peut éventuellement ne pas être définie au point a lui-même.

2.1.1 Limite finie lorsque la variable tend vers une valeur finie

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que la fonction f **tend vers** (ou **admet une limite**) ℓ au point a lorsqu'elle est définie au voisinage du point a (sauf éventuellement au point a lui-même) et qu'elle vérifie

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 :\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ |x-a| < \eta \implies |f(x)-\ell| < \varepsilon \tag{1}$$

On dira aussi $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a.

Exemple 2.1. *La fonction $f : x \mapsto 4x+1$ tend vers 5 en 1.*
✎Le montrer à l'aide de la définition ci-dessus en remarquant que $|4x+1-5| = 4\,|x-1|$.

. . . .

. . . .

2.1.2 Limite finie lorsque la variable tend vers l'infini

Soit une fonction f définie au voisinage de $+\infty$. On dit que la fonction f tend vers ℓ en $+\infty$ lorsqu'elle vérifie

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R} : \forall x \in\,]A, +\infty[\ \ |f(x)-\ell| < \varepsilon.$$

Pour une fonction f définie au voisinage de $-\infty$, on dit de même qu'elle tend vers ℓ en $-\infty$ lorsqu'elle vérifie

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R} : \forall x \in\,]-\infty, A[\ \ |f(x)-\ell| < \varepsilon.$$

Exemple 2.2. *Montrons que la fonction $x \mapsto 5 + 1/x$ tend vers 5 en $+\infty$.*
Soit $\varepsilon > 0$. ✎ *On pose $A = \ldots\ldots$*
Alors, pour tout $x > A$, on a $|5+1/x-5| = |1/x| < \ldots\ldots\ldots$

Proposition 2.1. *Si une fonction f est définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ en a, alors f est bornée au voisinage de a.*

Démonstration. On prend $\varepsilon = 1$ dans la définition ci-dessus : il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que pour tout $x \in V$, $|f(x)-\ell| < 1$. Ainsi, pour tout $x \in V$, $|f(x)| \leq |f(x)-\ell| + |\ell| < 1 + |\ell|$. La fonction f est donc bornée sur V. □

2.1.3 Limite infinie

Soit une fonction f définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. On dit que f tend vers $+\infty$ en a lorsqu'elle vérifie :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ |x-a| \leq \eta \implies f(x) \geq A.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Pour une fonction f définie au voisinage de $+\infty$, on dit que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ lorsqu'elle vérifie :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ x \geq B \implies f(x) \geq A.$$

Si f est maintenant définie au voisinage de $-\infty$, f tend vers $+\infty$ en $-\infty$ lorsqu'elle vérifie :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ x \leq B \implies f(x) \geq A.$$

L'adaptation pour $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ est immédiate pour $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

2.2 Unicité de la limite

Le théorème suivant établit que la limite, lorsqu'elle existe, est unique. La démonstration, qui n'est pas détaillée ici, est similaire à celle de l'unicité de la limite d'une suite réelle.

Théorème 2.1. *Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$. Si f admet ℓ et ℓ' comme limites en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\ell = \ell'$. On note alors $\ell = \lim_{x\to a} f(x)$.*

2.3 Lien avec les limites de suites

Théorème 2.2. *Soit une fonction f définie au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$\lim_{x\to a} f(x) = \ell$;*
2. *toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenue dans $\mathcal{D}_f$ telle que $\lim_{n\to\infty} u_n = a$ vérifie $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = \ell$.*

Démonstration. On donne la démonstration lorsque a et ℓ sont finis. On laisse l'adaptation de cette démonstration lorsque $a = \pm\infty$ ou $\ell = \pm\infty$ à effectuer comme exercice.

Montrons que (1) implique (2). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}_f$ telle que $\lim_{n\to\infty} u_n = a$. Montrons que $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = \ell$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, si $|x-a| \le \eta$ alors $|f(x) - \ell| \le \varepsilon$.

Comme $\eta > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \ge n_0$, $|u_n - a| \le \eta$. Il s'ensuit que pour tout $n \ge n_0$, on a $|f(u_n) - \ell| \le \varepsilon$. Ceci exprime justement que $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = \ell$.

On va maintenant montrer que (2) implique (1) en prouvant que la contraposée est vraie. Supposons donc que f ne tende pas vers ℓ lorsque $x \to a$. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout η de la forme $\eta = 1/(n+1)$ avec n entier positif, il existe $u_n \in \mathcal{D}_f$ vérifiant $|u_n - a| < 1/(n+1)$ et $|f(u_n) - \ell| \ge \varepsilon_0$. Ceci assure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{D}_f$ qui tend vers a mais telle que $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers ℓ. □

Exemple 2.3. *On note $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto |\sin(1/x)|$. La fonction f est définie au voisinage de 0. On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2(n+1)\pi}$ et $v_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}$.*

✎ Étudier les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$.

. . . .

. . . .

. . . .

✎ Qu'en déduit-on sur f ?

. . . .

2.4 Opérations sur les limites

2.4.1 Somme, produit, quotient

Théorème 2.3. *Soit deux fonctions f et g définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ qui tendent chacune lorsque $x \to a$ vers une limite finie ou infinie. Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *si $f + g$ est définie au voisinage de a et* ***si le résultat n'est pas une forme indéterminée****, alors*

$$\lim_{x \to a} (f + g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) \ ;$$

2. *si fg est définie au voisinage de a et* ***si le résultat n'est pas une forme indéterminée****, alors*

$$\lim_{x \to a} (fg)(x) = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x) \ ;$$

3. *si f/g est définie au voisinage de a et* ***si le résultat n'est pas une forme indéterminée****, alors*

$$\lim_{x \to a} (f/g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) / \lim_{x \to a} g(x) \ ;$$

on notera les cas particuliers suivants lorsque le dénominateur tend vers 0 ou vers $+\infty$ en valeur absolue

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = 0 \text{ si } \lim_{x \to a} |g(x)| = +\infty \text{ et } \lim_{x \to a} \left| \frac{1}{g(x)} \right| = +\infty \text{ si } \lim_{x \to a} |g(x)| = 0$$

Démonstration. Ce théorème se déduit du théorème précédent et des propriétés analogues sur les suites. □

2.4.2 Composée

On rappelle d'abord la définition de la composée $g \circ f$ de deux fonctions f et g. Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$. La composée $g \circ f$ est la fonction qui à x associe $g(f(x))$. Pour que $g(f(x))$ soit bien défini, il faut que x soit dans l'ensemble de définition de f et que $f(x)$ soit dans l'ensemble de définition de g. Ainsi, l'ensemble de définition de la fonction $g \circ f$ est $\mathcal{D}_{g \circ f} = \{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \in \mathcal{D}_g\}$ et on a

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{g \circ f} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array} \quad \text{qu'on peut décomposer en} \quad \begin{array}{ccc} x & \overset{f}{\longmapsto} f(x) \overset{g}{\longmapsto} & g(f(x)) \\ x & \xmapsto{\quad g \circ f \quad} & g(f(x)) \end{array}$$

Théorème 2.4. *Soit a et b deux points de $\overline{\mathbb{R}}$. Soit g une fonction telle que $\lim_{y \to b} g(y) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et f une fonction définie au voisinage de a à valeurs dans $\mathcal{D}_g$ et telle que $\lim_{x \to a} f(x) = b$, alors*

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = \ell.$$

Démonstration. Soit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $\mathcal{D}_f$ telle $\lim_{n \to \infty} x_n = a$. Comme f est à valeurs dans $\mathcal{D}_g$, la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de points de $\mathcal{D}_g$. De plus, comme $\lim_{x \to a} f(x) = b$, on a $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = b$. Il s'ensuit que $\lim_{n \to \infty} g(f(x_n)) = \ell$. Ceci étant vrai quelle que soit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant les conditions précédentes, on démontre ainsi le théorème. □

Exemple 2.4. *On étudie dans cet exemple la limite de la fonction $u : x \mapsto \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ lorsque $x \to +\infty$.*
✎ Déterminer f et g deux fonctions simples telles que $u = g \circ f$, puis le domaine de définition de u. Vérifier que u est définie au voisinage de $+\infty$.

. . . .

. . . .

. . . .

....

✎ Étudier la limite de $u(x)$ quand $x \to +\infty$.

....

....

2.5 Critère d'encadrement

On détermine souvent qu'une fonction converge en un point en l'encadrant par deux fonctions plus simples qui convergent vers la même limite.

Proposition 2.2. *Soit f, g, h trois fonctions définies au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$ vérifiant $f \leq g \leq h$ au voisinage de a. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$.*

En particulier, si f et g sont telles que $|f| \leq g$ au voisinage de a et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Exemple 2.5. ✎ *Étudier la limite de $f : x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ lorsque $x \to 0$.*

....

....

2.6 Limite à droite et à gauche

Dans toute la suite de cette partie, a désignera un point de $\mathbb{R}$. Soit une fonction f définie au voisinage de a. On dit que f admet $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ comme **limite à droite** (resp. **gauche**) en a s'il existe $h > 0$ tel que f soit définie sur $]a, a+h[$ (resp. $]a-h, a[$) et que la restriction de f à $]a, a+h[$ (resp. $]a-h, a[$) admette ℓ comme limite lorsque $x \to a$. On note alors $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ell$ (resp. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ell$). D'autres notations sont aussi utilisées : $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = \ell$ (resp. $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = \ell$) ou encore $f(a^+) = \ell$ (resp. $f(a^-) = \ell$).

Exemple 2.6.

1. *On a $\lim\limits_{x\to 0^\pm} 1/x = \pm\infty$.*
2. ✎ *Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^\pm} \dfrac{x}{|x|} = \pm 1$.*

   ....

   ....

Proposition 2.3. *Soit une fonction f vérifiant : il existe $h > 0$ tel que $]a-h, a[$ et $]a, a+h[$ soient tous deux inclus dans $\mathcal{D}_f$. Alors, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ell$.*

Exemple 2.7. *On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-1/x}$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ si $x < 0$.*
✎ Étudier la limite de $f(x)$ quand $x \to 0$.

. . . .

. . . .

En utilisant la propriété de la borne inférieure, on montre le résultat suivant sur l'existence de limites à droite et à gauche en tout point pour une fonction monotone sur un intervalle. C'est l'analogue de celui sur les limites des suites monotones. On ne détaille pas la preuve ici.

Théorème 2.5. *Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction monotone (c'est-à-dire croissante ou décroissante). Alors f admet une limite à droite et une limite à gauche en tout point de I.*

Dans ce chapitre il faut savoir démontrer sans indication :

— Le résultat sur la composition des limites (théorème 2.4) ;