Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2022-2023
Analyse 3

Feuille n° 4 : Séries numériques

Exercice 1 Étudier les séries suivantes (déterminer la nature, donner la somme si possible) :

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+100}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\frac{n}{n+1}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n\geq 0} e^{-n}$ **(d)** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Exercice 2 (1) Énoncer les règles de comparaison et de comparaison à la limite portant sur la convergence/divergence des séries.

(2) Étudier chacune des séries suivantes, en utilisant ces règles :

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{3}{5^n+2}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n^3+10)^{1/4}}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^n}$

Exercice 3 (1) Énoncer les règles de Cauchy, de D'Alembert, et de comparaison intégrale.

(2) Donner la nature de chacune des séries suivantes, en utilisant une de ces trois règles :

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{e^n}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln n}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

(d) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\ln n)^n}$ **(e)** $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n!}{(2n)!}$ **(f)** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^3}{(\ln 2)^n}$

Exercice 4 (1) Énoncer la règle de Riemann sur la convergence/divergence des séries.

(2) Étudier chacune des séries suivantes, en utilisant cette règle :

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n^3+3}}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2+1}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\ln n)^{10}}$

Exercice 5 Les *séries de Bertrand* ont leur terme général de la forme $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, où α et β sont des paramètres réels.

(a) Prouver qu'elles convergent si $\alpha > 1$ (pour tout β) et divergent si $\alpha < 1$ (pour tout β).

(b) Lorsque $\alpha = 1$, montrer qu'elles convergent pour $\beta > 1$ et divergent pour $\beta \leq 1$.

Exercice 6 Prouver que les séries suivantes convergent, et trouver leur somme :

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{n!}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n}{(n+1)!}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+4)}$

Exercice 7 On peut montrer que la règle de Cauchy est plus générale que la règle de D'Alembert (c-à-d, que la première permet en principe de traiter tous les cas où la seconde est concluante). On donne ici un exemple qui montre que la différence est stricte : un cas où la règle de Cauchy permet de conclure, mais pas la règle de D'Alembert. On fixe $a > 0$, $b > 0$ et on pose pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \begin{cases} a^p b^p & \text{si } n = 2p \text{ est pair} \\ a^{p+1} b^p & \text{si } n = 2p+1 \text{ est impair.} \end{cases}$$

(a) Montrer que le suite (u_{n+1}/u_n) n'admet pas de limite quand $a \neq b$, et que par conséquent la règle de D'Alembert ne s'applique pas.

(b) Montrer que $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{ab}$, et en déduire par la règle de Cauchy que la série converge si $ab < 1$ et diverge si $ab > 1$.

(c) Déterminer la nature de la série dans le cas $ab = 1$.

Exercice 8 On rappelle que deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes strictement positifs sont dites *équivalentes à l'infini* (et on écrit $u_n \sim v_n$) lorsque $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. C'est une proposition du cours que deux séries *à termes strictement positifs* équivalentes sont de même nature. Employer ce résultat (éventuellement à l'aide d'un DL afin de trouver l'équivalence) pour étudier les séries dont le terme général u_n est donné par :

(a) $\dfrac{\sqrt{n(n-1)}}{n^3 - 2\sqrt{n} + 3\ln n}$ **(b)** $e^{\frac{1}{\sqrt{2n-1}}} - 1$ **(c)** $\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{2n}}$

Exercice 9 Déterminer la nature de chacune des séries suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\arctan n}{n^2+1}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{e^n}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{\sqrt[3]{n^4+1}}{n\sqrt{n-1}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n(n+1)}{3^n}$ **(e)** $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n\ln n}$ **(f)** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n(n+1)}{2n+1}$

(g) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n\ln n}$ **(h)** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ **(i)** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$

(j) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ **(k)** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} e^{-\sqrt{n}}$ **(l)** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Exercice 10 [Constante d'Euler] Nous montrons que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie pour $n \geq 1$ par $u_n = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$ admet une limite finie γ, appelée *constante d'Euler*.

(a) On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer par un DL suivant $\dfrac{1}{n}$ que $v_n \sim -\dfrac{1}{2n^2}$.

(b) En déduire que $\sum v_n$ converge, et que, par conséquent, (u_n) admet une limite γ quand n tend vers l'infini. (La valeur précise de γ est $0,5772\ldots$, trouvée en 1781 par vous savez qui.)

Exercice 11 On sait que pour deux séries de termes strictement positifs $\sum u_n$ et $\sum v_n$, si on a $u_n \sim v_n$ quand $n \to \infty$ (c-à-d, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$), alors les séries sont de même nature. On développe ici un exemple qui montre que cette conclusion fait défaut pour les séries de signes variables. On pose pour $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

(a) Montrer que $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

(b) Prouver que $\sum v_n$ est une série alternée qui converge.

(c) Pourquoi le théorème sur les séries alternées ne s'applique-t-il pas à $\sum u_n$?

(d) Prouver que $u_{2p} + u_{2p+1} \sim -\frac{1}{p}$ quand $p \to \infty$. En déduire que la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 12 Lorsqu'une série est convergente mais non absolument convergente, il peut arriver que la somme de la série n'est pas stable par un regroupement de ses termes. On illustre ce phénomène par un exemple. On pose pour $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$.

(a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$ est semi-convergente (et non pas absolument convergente).

Écrivons la somme de la série d'une façon regroupée ainsi :

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\ldots+\left(\frac{1}{\sqrt{4p-3}}+\frac{1}{\sqrt{4p-1}}-\frac{1}{\sqrt{2p}}\right)+\ldots$$

et en appelant v_p $(p \geq 1)$ le terme général $\left(\frac{1}{\sqrt{4p-3}}+\frac{1}{\sqrt{4p-1}}-\frac{1}{\sqrt{2p}}\right)$.

(b) Montrer que $\sum v_p$ est une série positive divergente.

(On montre que ce phénomène d'instabilité par rapport à un regroupement de termes ne se produit pas lorsque la série est absolument convergente.)

Exercice 13 Le produit de Cauchy de deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ est la série $\sum c_n$ de terme général

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

(a) Montrer que si les suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ sont nulles à partir d'un certain rang alors

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\right).$$

(b) Montrer que si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes alors il en va de même de $\sum c_n$ et que l'on a dans ce cas

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\right).$$

(c) Pourquoi la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est-elle semi-convergente ? Montrer que le produit de Cauchy par elle-même de la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ diverge. On pourra remarquer que pour tout entier $n \geq 1$ et tout entier k compris entre 1 et n, on a $k(n-k) \leq (n-1)^2$.