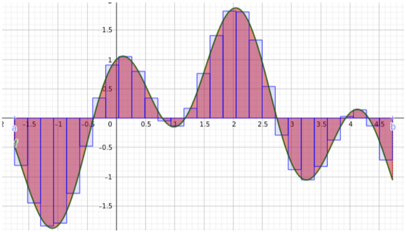
Analyse 3
Intégrale de Riemann

Référence pour des démonstrations et compléments :
Liret - Martinais, Analyse 1ère Année, Chapitre 9, Dunod

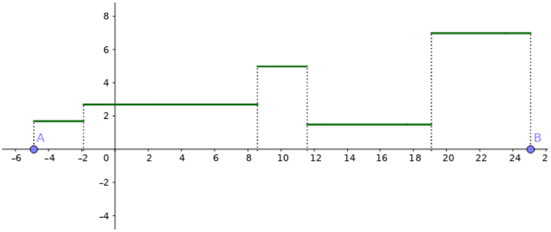
Illustrations sur Geogebra
`https://www.geogebra.org/m/vrhckdsd`



I Fonctions en escalier – 1° Définition

On fixe pour toute la suite deux réels a et b tel que $a < b$.

- On appelle *subdivision* de $[a, b]$ des nombres réels x_0,x_1,. . .,x_n tels que
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$
- Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est *en escalier* (ou *constante par morceaux*) s'il existe une subdivision x_0,x_1,. . .,x_n de $[a, b]$ telle que pour tout $i = 0, \ldots, n-1$, f est constante sur l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$. Une telle subdivision est dite *adaptée* à f.



I Fonctions en escalier – 2° Intégrale

Proposition-Définition.

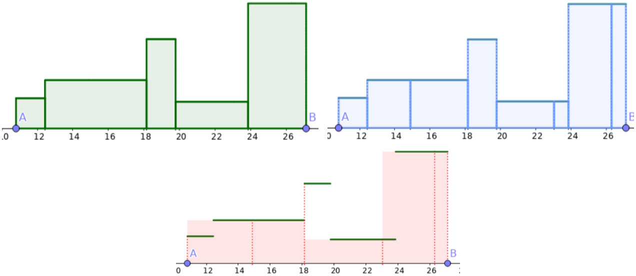
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier et $x_0, x_1, \ldots, x_n$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f.

Alors

$$\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1} - x_i)$$

ne dépend que de f (et non de la subdivision adaptée).

Cette somme s'appelle l'intégrale de f et sera notée $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.



I Fonctions en escalier – 3º Propriétés

Soit f et g deux fonctions en escalier sur $[a, b]$.

1. **(Linéarité 1.)** La fonction $f + g$ est en escalier et

$$\int_a^b (f+g)(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

2. **(Linéarité 2.)** Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction λf est en escalier et

$$\int_a^b \lambda f(t)\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

3. **(Monotonie.)** Si $f \leq g$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.
4. Si $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ diffère de f en seulement un nombre fini de points alors h est en escalier et $\displaystyle\int_a^b h(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

I Fonctions en escalier – 3º Propriétés

Soit f et g deux fonctions en escalier sur $[a, b]$.

5 **(Relation de Chasles.)** Pour tout $c \in]a, b[$, f est en escalier sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$. De plus,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Réciproquement, si $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ est en escalier sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$ alors h est en escalier sur $[a, b]$.

6 **(Inégalité triangulaire.)** La fonction $|f|$ est en escalier et

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t.$$

II Fonctions intégrables – 1° Définition

Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions en escalier u et U sur $[a, b]$ telles que

$$u \leq f \leq U \text{ et } \int_a^b (U - u)(t)\mathrm{d}t \leq \varepsilon.$$

Remarque. Une fonction intégrable sur $[a, b]$ est bornée sur $[a, b]$ car toute fonction en escalier est bornée.

II Fonctions intégrables – 1° Définition

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable (sur $[a, b]$).
Notons
$A = \left\{ \int_a^b u(t) \mathrm{d}t \colon u \text{ en escalier et } u \leq f \right\}$ et
$B = \left\{ \int_a^b U(t) \mathrm{d}t \colon U \text{ en escalier et } U \geq f \right\}$.
Alors A admet une borne supérieure, B une borne inférieure et $\sup A = \inf B$.
On pose

$$\int_a^b f(t) \mathrm{d}t = \sup A = \inf B.$$

II Fonctions intégrables – 2º Propriétés de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$.

1. **(Linéarité 1.)** La fonction $f+g$ est intégrable et
$$\int_a^b (f+g)(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$
2. **(Linéarité 2.)** Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction λf est intégrable et
$$\int_a^b \lambda f(t)\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$
3. **(Monotonie.)** Si $f \leq g$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.
4. Si $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ diffère de f en seulement un nombre fini de points alors h est intégrable et $\displaystyle\int_a^b h(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

II Fonctions intégrables – 2º Propriétés de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$.

5 **(Relation de Chasles.)** Pour tout $c \in]a, b[$, f est intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$. De plus,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Réciproquement, si $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$ alors h est intégrable sur $[a, b]$.

6 **(Inégalité triangulaire.)** La fonction $|f|$ est intégrable et

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t.$$