

---

**PARTIEL DU 7 DÉCEMBRE 2022 - DURÉE : 1H30**

---

La rédaction est importante, nous allons en tenir compte dans la correction.

**Exercice 1** Question de cours

Énoncer et démontrer le théorème de comparaison séries/intégrales.

**Exercice 2** Intégrales impropres

1. Calculer  $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$ .
2. Montrer que pour tout réel  $t > 0$ , on a

$$e^t - \cos t - t > 0.$$

*Indication : procéder à l'étude d'une fonction.*

3. Montrer que  $\int_1^{+\infty} \frac{t}{e^t - \cos t - t} dt$  est convergente.
4. Déterminer la nature de  $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - \cos t - t} dt$ .
5. Déterminer la nature de  $\int_0^{+\infty} \frac{t \sin t}{e^t - \cos t - t} dt$ .

**Exercice 3** Irrationalité de  $e$

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$ .

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $I_n > 0$ .
2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $I_n \leq \frac{e}{n+1}$ .
3. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , trouver une relation entre  $I_{n+1}$  et  $I_n$ .
4. En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe des entiers relatifs  $a_n$  et  $b_n$  tels que

$$I_n = a_n e + b_n.$$

5. Supposons que  $e$  est rationnel et considérons alors deux entiers naturels non nuls  $p$  et  $q$  tels que  $e = \frac{p}{q}$ .

- (a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $I_n \geq \frac{1}{q}$ .
- (b) En déduire une contradiction et conclure.