Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre d'automne 2020-2021

Algèbre III - Licence de mathématiques générales et applications L2

Feuille d'exercices n° 8

Forme de Jordan

Exercice 1. Soit u un endomorphisme trigonalisable d'un espace vectoriel de dimension 3. On suppose que u a deux valeurs propres a, b distinctes, a avec multiplicité algébrique 2.

1. Quels sont les possibilités pour son polynôme minimal m_u ?
2. On suppose que m_u est de degré 2.
   (a) Quels sont les dimensions des espaces propres E_a, E_b et des espaces caractéristiques F_a, F_b ?
   (b) Donner une stratégie pour la construction d'une base dans laquelle la matrice associée à u est triangulaire (ou diagonale, si c'est possible).
3. On suppose que m_u est de degré 3.
   (a) Quels sont les dimensions des espaces propres E_a, E_b et des espaces caractéristiques F_a, F_b ?
   (b) Donner une stratégie pour la construction d'une base dans laquelle la matrice associée à u est triangulaire (ou diagonale, si c'est possible) et appliquer cette stratégie à l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui dans la base canonique est donné par la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Soit $D = \frac{d}{dx}$ la dérivation sur $C^\infty(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions réelles infiniment souvent dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $a \neq b \in \mathbb{R}$.

1. Justifier que D est un endomorphisme.
2. Résoudre l'équation differentielle $(D + a\,\mathrm{id})^2 f = 0$ (donner la solution générale).
3. Montrer que toute solution f de l'équation differentielle $(D + a\,\mathrm{id})^2(D + b\,\mathrm{id})^2 f = 0$ se décompose d'une manière unique en une somme

$$f = f_1 + f_2$$

   où f_1 est solution de $(D + a\,\mathrm{id})^2 f_1 = 0$ et f_2 est solution de $(D + b\,\mathrm{id})^2 f_2 = 0$.

   Indication : Lemme des noyaux.

Exercice 3. Soit u un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel de dimension 4.

1. Justifier qu'il existe une base dans laquelle u est répresenté par une des matrices suivantes et déterminer le polynôme minimal dans chaqu'un des cas

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Parmi ces matrices, est-ce qu'il y en a qui sont semblables ?

Exercice 4. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Trouver une matrice P inversible et une matrice T qui a la forme de Jordan t.q.

$$T = P^{-1}AP.$$

Il n'est pas demandé d'inverser P.

Exercice 5. Soit $D = \frac{d}{dx}$ la dérivation sur $\mathbb{R}_n[X]$, $n \in \mathbb{N}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose

$$L = D - \lambda \mathrm{id}.$$

1. Montrer que L est un endomorphisme trigonalisable sur $\mathbb{R}$.
2. Trouver une base t.q. la matrice associée à L dans cette base a la forme de Jordan.

   Indication : On pourrait commencer avec le cas $\lambda = 0$.

Exercice 6. On rappel qu'une matrice de taille $n \times n$ de la forme

$$J_{\lambda,n} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \lambda & 1 & 0 & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

s'appelle un bloc de Jordan (de taille $n \times n$) pour la valeur propre λ.

1. Calculer ${J_{\lambda,n}}^k$ pour $k \in \mathbb{N}$.
2. Calculer $\exp(tJ_{\lambda,n})$ pour $t \in \mathbb{R}$.
3. En déduire un expression pour $\exp(tA)$, où A est une matrice carrée (complexe) et $t \in \mathbb{R}$.