Université Claude Bernard
Année universitaire 2022 – 2023

Licence de Mathématiques
Algèbre 3

Examen du 5 janvier 2023 - Durée : 2h

Les documents ne sont pas permis. Rédigez de manière claire et structurée, ce sera pris en compte dans la notation. Le barême est indicatif. Il suffit d'avoir 20 points pour obténir la note maximale.

Exercice 1 Question de cours, 1+2 pts.

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E.

1. *Donner la définition d'un sous-espace cyclique pour u.*
   Un sous-espace F de E est cyclique pour u si il contient un vecteur $x \in F$ t.q. $F = \mathrm{Vect}\{x, u(x), \cdots\}$.
2. *Montrer que u est trigonalisable si et seulement si il existe une base $(b_1, \cdots, b_n)$ pour E t.q. pour tout $1 \leq k \leq n$ $\mathrm{Vect}\{b_1, \cdots, b_k\}$ est stable par u.*

Exercice 2 1+0.5+1+1+0.5+1=5 pts.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Montrer que les sous-espaces $F = \mathrm{Vect}\{e_1 + e_2 + e_3\}$ et $G = \{x = \sum_{k=1}^{3} x_k e_k \,;\, \sum_{k=1}^{3} x_k = 0\}$ sont stable pour u.*
   Comme $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on en déduit que $u(e_1 + e_2 + e_3) = 3(e_1 + e_2 + e_3) \in F$, d'où F est u-stable. Soit $x = \sum_{k=1}^{3} x_k e_k \in G$. Comme $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$ et $(2x_1 + x_2) + (x_1 + x_2 + x_3) + (x_2 + 2x_3) = 3(x_1 + x_2 + x_3) = 0$, on en déduit que $u(x) \in G$, d'où G est u-stable.
2. *Posons $b_1 = e_1 - e_2$ et $b_2 = e_2 - e_3$. Vérifier que $\mathcal{B}_G := (b_1, b_2)$ est une base de G.*
   Soit $x = \sum_{k=1}^{3} x_k e_k \in G$. Alors, $\sum_{k=1}^{3} x_k = 0$, en particulier $x_2 = -(x_1 + x_3)$, d'où

   $$x = x_1 e_1 - (x_1 + x_3) e_2 + x_3 e_3 = x_1(e_1 - e_2) - x_3(e_2 - e_3) \in \mathrm{Vect}\{b_1, b_2\}.$$

   Comme b_1 et b_2 ne sont pas colinéaire, on en déduit que $\mathcal{B}_G = (b_1, b_2)$ est une base de G.

3. *Donner la matrice de la réduction u_G, de u sur G, dans cette base $\mathcal{B}_G$.*
   Par définition,
$$u(b_1) = u(e_1) - u(e_2) = (2e_1 + e_2) - (e_1 + e_2 + e_3) = e_1 - e_3 = b_1 + b_2,$$
$$u(b_2) = u(e_2) - u(b_3) = (e_1 + e_2 + e_3) - (e_2 + e_3) = e_1 - e_3 = b_1 + b_2,$$
   d'où on a $[u_G]_{\mathcal{B}_G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
4. *Montrer que u_G est diagonisable.*
   La matrice $[u_G]_G$ ayant deux valeurs propres distinctes 0 et 2, u_G est diagonalisable.
5. *En déduire que l'endomorphisme u est diagonalisable.*
   Notons que $E = F \oplus G$. Comme $F = E_3$ et que $G = E_2 \oplus E_0$, l'espace vectoriel E est la somme directe des sous-espaces propres de u, d'où u est diagonalisable.
6. *Donner une matrice de passage P et une matrice diagonale D vérifiant $D = P^{-1}AP$.*
   Un vecteur propre pour la valeur propre 3 est $e_1 + e_2 + e_3$. Un vecteur propre pour la valeur propre 2 est $b_1+b_2 = e_1-e_3$. Un vecteur propre pour la valeur propre 0 est $b_1-b_2 = e_1+2e_2+e_3$.
   Avec la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *on obtient alors* $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 `0.5+3+1.5=5 pts.`

On considère le système d'équations
$$\begin{array}{rcrcr} x_{n+1} & = & 2x_n & - & y_n \\ y_{n+1} & = & 9x_n & + & 8y_n \end{array}$$
avec les conditions $x_0 = 1$, $y_0 = 0$.

1. *Écrire le système sous la forme d'une équation matricielle*
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$
   Par définition,
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_n - y_n \\ 9x_n + 8y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$
2. *Calculer les puissances A^n de A, $n \in \mathbb{N}$.*
   Le polynôme caractéristique p_A étant $p_A(X) = (X-5)^2$, la seule valeur propre de la matrice A est 5. Posons $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ *et* $b_1 = (A - 5I_2)b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, *on a $Ab_1 = 5b_1$. Alors, la matrice* $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ *nous donne* $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. *En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP = \left(5I_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)^n = (5I_2)^n + \binom{n}{1}(5I_2)^{n-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^n & n \cdot 5^{n-1} \\ 0 & 5^n \end{pmatrix},$$
   d'où
$$A^n = P \begin{pmatrix} 5^n & n \cdot 5^{n-1} \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 5^n - 3n \cdot 5^{n-1} & -n \cdot 5^{n-1} \\ 9n \cdot 5^{n-1} & 5^n + 3n \cdot 5^{n-1} \end{pmatrix}.$$

3. En déduire la solution x_n pour $n \in \mathbb{N}$. *Comme* $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, *on a* $x_n = 5^n - 3n \cdot 5^{n-1}$.

Exercice 4 1+3+3=7 pts.

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel complexe E de dimension 3. On suppose que u a une seule valeur propre $\lambda = 2$. On note m_u le polyôme minimal de u. *Le polynôme caractéristique P_u de u doit être $P_u(X) = (2-X)^3$. Le polynôme minimal m_u de u étant un diviseur de P_u, les seules possibilités pour m_u sont $X-2$, $(X-2)^2$ ou $(X-3)^3$.*

1. *Supposons que* $\deg m_u = 1$. *Quel est u ?*
   Comme $m_u(X) = X-2$ dans ce cas, $m_u(u) = u - 2\mathrm{id}_E = 0$, i.e., $u = 2\mathrm{id}_E$.
2. *Supposons que* $\deg m_u = 2$. *Dans ce cas, $m_u(X) = (X-2)^2$.*
   i) *Quelle est la dimension du sous-espace propre E_2 associé à la valeur propre 2 ? Justifier votre réponse.*
   Comme $(u-2\mathrm{id}_E)^2 = 0$, on a $\mathrm{Im}(u-2\mathrm{id}_E) \subseteq \mathrm{Ker}(u-2\mathrm{id}_E)$. En plus, le théorème de rang implique que $\mathrm{rang}(u-2\mathrm{id}_E) + \dim \mathrm{Ker}(u-2\mathrm{id}_E) = 3$. On en déduit que $\dim E_2 = 2$.

   ii) *Montrer qu'il existe un vecteur $b_1 \in E$ tel que $(u-2\mathrm{id})(b_1) \neq 0_E$ mais $(u-2\mathrm{id})^2(b_1) = 0_E$.*
   Comme $u - 2\mathrm{id}_E$ est une endomorphisme non nul, il existe un vecteur b_1 t.q. $(u - 2\mathrm{id}_E)(b_1) \neq 0$. Comme $m_u(X) = (X-2)^2$, on a $(u-2\mathrm{id}_E)^2 = 0$, d'où $(u-2\mathrm{id}_E)^2(b_1) = 0$.

   iii) *Soit $\mathcal{B}$ une base de E_2 contenant $b_2 = u(b_1) - 2b_1$. Écrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B} \cup \{b_1\}$ (faites un choix d'ordre t.q. b_2 et b_1 sont les derniers vecteurs de la base).*
   D'abord, on a $0 = (u-2\mathrm{id}_E)^2(b_1) = (u-2\mathrm{id}_E)(b_2)$, d'où $u(b_2) = 2b_2$. Comme $\dim E_2 = 2$, il existe un vecteur $b_3 \in E_2$ qui n'est pas un multiple scalaire de b_2. Dans la base (b_3, b_2, b_1), la matrice de u est $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
3. *Supposons que* $\deg m_u = 3$. *Dans ce cas $m_u(X) = (X-2)^3$.*
   i) *Montrer qu'il existe un vecteur $y \in E$ tel que $(u-2\mathrm{id})^2(y) \neq 0$.*
   Comme $(u-2\mathrm{id}_E)^2 \neq 0$, il existe un vecteur $y \in E$ t.q. $(u-2\mathrm{id}_E)^2(y) \neq 0$.

   ii) *Montrer que les trois vecteurs $b_1 = y$, $b_2 = (u-2\mathrm{id})(y)$ et $b_3 = (u-2\mathrm{id})^2(y)$ sont linéairement indépendants.*
   Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ t.q. $x = \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 = 0$. Puisque $(u-2\mathrm{id}_E)^2(b_1) = (u-2\mathrm{id}_E)(b_2) = b_3 \neq 0$ mais $(u-2\mathrm{id}_E)^2(b_2) = (u-2\mathrm{id}_E)(b_3) = 0$, on a $0 = (u-2\mathrm{id}_E)^2(x) = \alpha b_3$ d'où $\alpha = 0$, ensuite, $0 = (u-2\mathrm{id}_E)(x) = \beta b_3$ d'où $\beta = 0$, et enfin, $\gamma b_3 = 0$ d'où $\gamma = 0$.

   iii) *En déduire que E est cyclique pour u.*
   D'abord, on vient de voir que E et $(u-2\mathrm{id}_E)$-cyclique (et engendré par y). Donc, d'après la question précédente, il suffit de montrer que les trois vecteurs b_1, b_2 et b_3 appartient au sous-espace vectoriel engendré par $y, u(y)$ et $u^2(y)$. Ceci est une évidence car $b_1 = y, b_2 = u(y) - 2y$ et $b_3 = u^2(y) - 4u(y) + 4y$.

   iv) *Écrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B} = (b_3, b_2, b_1)$.*
   Par définition, on a $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 `2+2+2=6 pts.`

Soit $q \in \mathbb{K}^*$ tel que $q^2 \neq 1$.

1. *Diagonaliser la matrice*
$$A = \begin{pmatrix} q+q^{-1} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
c.à.d. trouver une matrice P inversible et une matrice D diagonale t.q. $D = P^{-1}AP$.
La somme des valeurs propres doit être $\mathrm{Tr}(A) = q + q^{-1}$ et leur produit $\det A = 1$. Donc les valeurs propres sont q et q^{-1}. On trouve que $(q, 1)$ et $(q^{-1}, 1)$ sont des vecteurs propres associés à q et q^{-1}. Posons $P = \begin{pmatrix} q & q^{-1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}$. Ces matrices vérifient $D = P^{-1}AP$.

2. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit Δ_n le déterminant de la matrice carrée de taille $n \times n$ définie par*
$$\Delta_n = \det \begin{pmatrix} q+q^{-1} & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & q+q^{-1} & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & q+q^{-1} \end{pmatrix}$$

   i) *Pour $n \in \mathbb{N}$ supérieur à 2, trouver une relation entre Δ_n, Δ_{n-1} et Δ_{n-2}.*
   Développant en cofacteur par rapport à la première ligne (ensuite en première colonne pour le deuxième facteur) :
$$\begin{aligned}\Delta_n =&(q+q^{-1}) \begin{vmatrix} q+q^{-1} & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & q+q^{-1} & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & q+q^{-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q+q^{-1} & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & q+q^{-1} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & q+q^{-1} \end{vmatrix} \\ =&(q+q^{-1})\Delta_{n-1} - \Delta_{n-1}.\end{aligned}$$

   ii) *En déduire une formule explicite pour $(q - q^{-1})\Delta_n$.*
   Posons $\Delta_0 = 1$, alors la récursion reste vraie pour $n = 2$: $\Delta_2 = (q+q^{-1})\Delta_1 - \Delta_0$ et nous pouvons écrire
$$\begin{pmatrix} \Delta_{n+1} \\ \Delta_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \Delta_n \\ \Delta_{n-1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} q+q^{-1} \\ 1 \end{pmatrix}.$$
   D'où
$$\Delta_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} PD^nP^{-1} \begin{pmatrix} q+q^{-1} \\ 1 \end{pmatrix}$$
   avec P et D de la question 1. Ceci donne
$$\Delta_n = \frac{1}{q-q^{-1}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & q^{-1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^n & 0 \\ 0 & q^{-n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -q^{-1} \\ -1 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q+q^{-1} \\ 1 \end{pmatrix}$$
   et
$$(q-q^{-1})\Delta_n = \begin{pmatrix} q^n & q^{-n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -q^{-1} \\ -1 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q+q^{-1} \\ 1 \end{pmatrix} = q^{n+1} - q^{-n-1}.$$