
Correction du partiel du 29 novembre 2022

Questions de cours 4 pts.

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1. Donner la définition d'un espace caractéristique pour u . (2 pts)
2. Soit P un polynôme annulateur pour u .
Montrer que toute valeur propre pour u est une racine de P . (2 pts)

Exercice 1 6 pts.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les espaces propres de A . (2 pts)
2. Déterminer les espaces caractéristiques de A . (2 pt)
3. Déterminer le polynôme minimal de A . (2 pt)

Correction 1 1. On commence par calculer le polynôme caractéristique de A , en développant par rapport à la première ligne (par exemple) :

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \begin{vmatrix} 1-X & 0 & -1 \\ -1 & -X & 1 \\ 1 & 2 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X) \begin{vmatrix} -X & 1 \\ 1 & 1-X \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -X \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (1-X)(-X + X^2 - 2) - (-2 + X) \\ &= -X^3 + 2X^2 + X - 2 + 2 - X \\ &= -X^3 + 2X^2 \\ &= -X^2(X - 2) \end{aligned}$$

Donc les valeurs propres de A sont 0 et 2. Déterminons maintenant les espaces propres :

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
X \in E_0 \Leftrightarrow AX = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ -x + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ y = -x \end{cases} \\
&\Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow X \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Donc $E_0 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$

$$\begin{aligned}
X \in E_2 \Leftrightarrow AX = 2X &\Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 2x \\ -x + z = 2y \\ x + 2y + z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = -x \end{cases} \\
&\Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow X \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Donc $E_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$

2. Pour F_2 , il n'y a rien à faire, en effet 2 est une valeur propre de multiplicité algébrique

1 donc $F_2 = E_2$. Pour F_0 , on calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, puis on en déduit $\ker(A^2) =$

$\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. Pour cela soit on résout un système comme à la question précédente,

soit on remarque que ces deux vecteurs sont évidemment dans le noyau et que A^2 est de rang 1. On peut calculer A^3 et se rendre compte que le noyau se stabilise, mais le plus élégant est de dire que les espaces caractéristiques sont en somme directe dans $\mathbb{R}^3$ par le Lemme des noyaux (c'est du cours), et que donc la dimension de F_0 doit être 2 (puisque

F_0 est de dimension 1). Donc $F_0 = \ker(A^2) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$

3. Plusieurs méthodes ici encore, un bon nombre d'entre vous a dit que m_A doit diviser P_A et avoir les mêmes racines ET être minimal (souvent oublié), c'est donc soit $X(X-2)$ soit $X^2(X-2)$, or ce doit être un polynôme annulateur et on vérifie que $A(A-2I_3) \neq 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

Une autre manière de faire est d'avoir compris (mais ce n'est pas explicite dans le cours) que $m_A(X)$ est le produit des $(X - \lambda)^{q_\lambda}$ où λ parcourt les valeurs propres de A et q_λ est la puissance intervenant dans la définition du cours de l'espace caractéristique, ce qui donne directement $m_A(X) = X^2(X - 2)$ ici puisqu'on a déjà calculé les espaces caractéristiques.

Exercice 2 5 pts.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Trouver une matrice P inversible et une matrice T triangulaire t.q. $T = P^{-1}AP$. (2 pts)
2. Calculer A^n . (2 pts)
3. On considère le système de récurrence $a_{n+1} = a_n - b_n$, $b_{n+1} = a_n + 3b_n$ avec des conditions initiales $a_0 = b_0 = 1$. Trouver a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. (1 pt)

Correction 2 1. On calcule facilement $P_A(X) = (X - 2)^2$ (exo). Déterminons E_0 : Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$X \in E_2 \Leftrightarrow AX = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2x \\ x + 3y = 2y \end{cases} \Leftrightarrow y = -x \Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

Donc $E_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. On suit maintenant l'algorithme du cours : soit $b_1 \notin E_2$, par exemple $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on pose $b_2 = (A - 2I_2)b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_2$ (ce n'est pas une surprise). La matrice correspondant au changement de base de la base $\mathcal{B} = (b_2, b_1)$ vers la base canonique est $P = ([b_2]_C, [b_1]_C) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et on a naturellement $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, car $Ab_2 = 2b_2$ et $Ab_1 = 2b_1 + b_2$ par définition de b_2 . On n'a PAS besoin à ce stade de calculer P^{-1} .

2. Par récurrence immédiate $A^n = PT^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons T^n : On a $T = D + N$ avec $D = 2I_2$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nilpotente d'ordre 2. Clairement D et N commutent, on peut donc utiliser la formule du binôme de Newton :

$$T^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^n + nD^{n-1}N = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

La deuxième égalité est due au fait que $N^k = 0$ pour $k \geq 2$. Maintenant on a besoin de calculer P^{-1} , ce qui est facile avec la formule de la transposée de la comatrice : $P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} {}^t \text{co}(P) = - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Donc on a

$$\begin{aligned} A^n = PT^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n2^{n-1} & 2^n + n2^{n-1} \\ 2^n & 2^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n - n2^{n-1} & -n2^{n-1} \\ n2^{n-1} & 2^n + n2^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$; le système s'écrit alors $X_{n+1} = AX_n$. C'est une suite géométrique que nous savons expliciter par récurrence immédiate : on a

$$X_n = A^n X_0 = \begin{pmatrix} 2^n - n2^{n-1} & -n2^{n-1} \\ n2^{n-1} & 2^n + n2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n - n2^{n-1} - n2^{n-1} \\ n2^{n-1} + 2^n + n2^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n(1-n) \\ 2^n(1+n) \end{pmatrix}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'où $a_n = 2^n(1-n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 6 pts.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2 et A^3 . (1 pt)
2. En déduire un polynôme annulateur de A . (1 pt)
3. En déduire également l'inverse de la matrice A . (1 pt)
4. Donner le polynôme minimale de u . (2 pt)
5. Est-ce qu'il existe une base $\mathcal{B}$ dans $\mathbb{R}^3$ pour laquelle $[u]_{\mathcal{B}}$ est triangulaire? (1 pt)

Correction 3 1.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

2. On note que $A^3 + 8I = 0$, d'où $P(X) = X^3 + 8$ est un polynôme annulateur.
3. $A^3 = -8I$ implique $-8A^{-1} = A^2$, donc

$$A^{-1} = -\frac{1}{8}A^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{3} \\ 0 & -\frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

4. Le polynôme minimal $m_A(X)$ divise $P(X) = X^3 + 8$. On devine que -2 est une racine de P . Division euclidienne de $P(X)$ par $X + 2$ donne $P(X) = (X + 2)Q(X)$ avec $Q(X) = X^2 - 2X + 4$. Puisque $Q(X) = X^2 - 2X + 4$ est irréductible sur $\mathbb{R}$ ($\Delta = -12$), le polynôme minimal ne peut être que $X + 2$, $Q(X)$ ou $P(X)$. Puisque -2 est une valeur propre de A , c'est aussi une racine de m_A est donc $X + 2$ divise m_A . De plus, $A \neq -2I$, donc $m_A(X) \neq X + 2$. Donc la seule option est $m_A(X) = P(X)$.
5. Comme le polynôme minimal $m_A(X) = (X + 2)(X^2 - 2X + 4)$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, nous ne pouvons pas trigonaliser la matrice A sur $\mathbb{R}$, c.à.d. il n'existe pas de base dans $\mathbb{R}^3$ dans laquelle A est diagonale.