

Université Claude Bernard Lyon 1
Année 2022-2023
Automne 2022

L2 UE Algèbre III
Séquence 3

Algèbre III

Notes du cours

version du 12 septembre 2022

Johannes Kellendonk

Table des matières

1	Espaces vectoriels et applications linéaires	5
1.1	Espaces vectoriels	5
1.1.1	Bases	6
1.1.2	Somme directe	7
1.2	Applications linéaires	8
1.2.1	Noyau, image et rang	8
1.2.2	Rappel du calcul matriciel	9
1.2.3	Matrice comme application linéaire	10
1.2.4	Matrice d'une application linéaire	10
1.3	Changement de la base	11
1.3.1	Vecteur dans la nouvelle base	11
1.3.2	Application linéaire dans la nouvelle base	12
2	Déterminant	13
2.1	Permutations	13
2.1.1	Signe d'une permutation	15
2.2	Déterminant d'une matrice	16
2.2.1	Déterminant d'un endomorphisme	20
2.3	Calcul pratique du déterminant	21
2.3.1	Par transformations élémentaires de la matrice	21
2.3.2	Developpement du déterminant lelong d'une colonne ou ligne	21
2.4	Une formule pour l'inverse d'une matrice	23
2.4.1	Formules de Cramer	23

Chapitre 1

Espaces vectoriels et applications linéaires

Dans cette section on rappelle (sans preuves) les notions de l'Algèbre Linéaire vu en L1.

1.1 Espaces vectoriels

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, où $\mathbb{C}$ (plus généralement, $\mathbb{K}$ peut être un corps). Un *espace vectoriel* E sur $\mathbb{K}$ est un ensemble muni de deux opérations algébriques : la somme de deux vecteurs et la multiplication avec un scalaire (un élément de $\mathbb{K}$)

$$\begin{aligned} E \times E \ni (x, y) &\mapsto x + y \in E \\ \mathbb{K} \times E \ni (\lambda, x) &\mapsto \lambda x \in E \end{aligned}$$

Ces deux opérations satisfont certains axiomes comme la commutativité de l'addition, l'associativité et une forme de distributivité.¹ En particulier, E contient le *vecteur zero* 0_E , qui satisfait $x + 0_E = x$ et $x + (-x) = 0_E$.

En appliquant plusieurs fois ces opérations à des vecteurs $x_1, \dots, x_n \in E$ et scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, on obtient un nouveau vecteur $x \in E$, qui est une *combinaison linéaire* des x_i

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n.$$

On note $\text{Vect}\{x_1, \dots, x_n\}$ l'espace de toutes les combinaisons linéaires qu'on peut fabriquer (engendrer) avec les vecteurs x_1 à x_n)

$$\text{Vect}\{x_1, \dots, x_n\} = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \mid \lambda_i \in \mathbb{K}\}.$$

Exemples d'espaces vectoriels sont $\{0\}$, $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ (polynômes d'une variable X de degré $\leq n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$) où $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ (toutes les fonctions sur une ensemble X à valeur dans $\mathbb{K}$). Un vecteur n'est donc pas toujours une "fleche", mais peut être n'importe quoi. On dit souvent aussi *espace linéaire* à la place de espace vectoriel.

1. Les axiomes d'un espace vectoriel E :

1. $\forall x, y \in E : x + y = y + x$
2. $\forall x, y, z \in E : (x + y) + z = x + (y + z)$
3. E contient un élément 0_E t.q. $\forall x \in E : x + 0_E = x$
4. $\forall x \in E : 0x = 0_E$ (ici $0 \in \mathbb{K}$)
5. $\forall x \in E : 1x = x$ (ici $1 \in \mathbb{K}$)
6. $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
7. $\forall x \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
8. $\forall x \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$

1.1.1 Bases

Soit E un espace vectoriel. Une famille $\{x_1, \dots, x_n\} \subset E$ est dite *libre* (où *linéairement indépendantes*) si l'équation (avec les variables $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$)

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0_E$$

n'admet que la solution $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. Si $\{x_1, \dots, x_n\}$ n'est pas libre, on l'appelle aussi famille *liée*, et dans ce cas il existe i t.q. x_i est combinaison linéaire des autres x_j , $j \neq i$.

Une famille $\{x_1, \dots, x_n\} \subset E$ est dite *génératrice* si tout élément x de E est combinaison linéaire des x_i , c.a.d. ils existent $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ t.q.

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$$

Autrement dit, $\{x_1, \dots, x_n\} \subset E$ est génératrice si $\text{Vect}\{x_1, \dots, x_n\} = E$.

Définition 1.1.1. Une *base* pour l'espace vectoriel E est une famille ordonnée² de E , qui est *libre et génératrice*.

Étant donnée une base $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ de E on peut écrire chaque $x \in E$ d'une manière *unique* comme combinaison linéaire des $b_1, \dots, b_n$,

$$x = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$$

où $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Les scalaires λ_i s'appellent les *coefficients* (ou *coordonnées* ou *composantes*) de x dans la base $\mathcal{B}$ et on écrit³

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Une procédure inductive de construire une base pour E est la suivante : Si E n'est pas trivial, alors il contient un élément $v_1 \neq 0_E$. $\{v_1\}$ est une famille libre. On peut agrandir une famille libre $\{v_1, \dots, v_k\}$ qui n'engendre pas E en choisissant un vecteur $x \in E \setminus \text{Vect}\{v_1, \dots, v_k\}$. Ainsi on obtient une famille libre $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1} = x\}$ avec un élément de plus. Cette procédure doit s'arrêter si $E \setminus \text{Vect}\{v_1, \dots, v_k\} = \emptyset$. En particulier, toute famille libre $\{v_1, \dots, v_k\}$, peut être complétée en une base pour E .

Il est important de réaliser qu'une base pour E n'est jamais unique (sauf dans le cas où E est trivial, c.à.d. $E = \{0_E\}$). Par contre, la taille de la base (le nombre des éléments) est uniquement déterminée par E . Elle peut d'ailleurs être infinie, notamment si la procédure d'en haut ne s'arrête pas. Cette taille est appelée la *dimension* de E , notée $\dim E$.

On rappelle que $\mathbb{K}^n := \overbrace{\mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}}^{n\text{-fois}}$ et qu'on note ses vecteurs $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et appelle les λ_i les coordonnées du vecteur. La base *canonique* de $\mathbb{K}^n$ est $(e_1, \dots, e_n)$ avec $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ etc.. Dans la base canonique $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ s'écrit comme le vecteur colonne

$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$. Un vecteur colonne peut donc être vu comme un vecteur de $\mathbb{K}^n$ exprimé dans la base canonique. L'application $E \ni x \mapsto [x]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{K}^n$ est une bijection linéaire (un *isomorphisme d'espaces vectoriels*) entre E et $\mathbb{K}^n$. Toute espace vectoriel (sur $\mathbb{K}$) de dimension n est alors isomorphe à $\mathbb{K}^n$. Il est important de se rendre compte que l'isomorphisme dépend de la base $\mathcal{B}$.

2. Une famille ordonnée est une suite d'éléments $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ (ou $(b_1, b_2, \dots)$ si la famille est infinie). On trouve aussi la notation avec des accolades $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ pour une base.

3. On trouve aussi l'écriture en ligne $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ car elle est plus compacte dans un texte, mais pour le calcul matriciel il est plus astucieux d'écrire les éléments en colonne.

1.1.2 Somme directe

Soit E un espace vectoriel. Une partie $F \subset E$ est appelée *sous-espace* de E , si $\forall x, y \in F$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$

$$x + y \in F, \quad \lambda x \in F$$

Définition 1.1.2. Soient $F_1, \dots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de E .

1. On définit la somme des F_i :

$$\begin{aligned} F_1 + \dots + F_m &= \{f_1 + \dots + f_m \mid \forall i = 1, \dots, m, f_i \in F_i\} \\ &= \{e \in E \mid \exists f_1 \in F_1, \dots, \exists f_m \in F_m, e = f_1 + \dots + f_m\} \end{aligned}$$

Cet ensemble est un sous-espace vectoriel de E (exercice).

2. On dit que les F_i sont en somme directe et on écrit $F_1 + \dots + F_m = F_1 \oplus \dots \oplus F_m$ si, dans l'écriture de e comme somme $e = f_1 + \dots + f_m$, le choix des f_i est unique. Autrement dit, l'équation $f_1 + \dots + f_m = 0$, avec $f_i \in F_i$, n'a que la solution $f_i = 0$ pour tout $i = 1, \dots, m$.
3. On dit que E est la somme des F_i si $E = F_1 + \dots + F_m$.
4. On dit que E est la somme directe des F_i et on l'écrit sous la forme $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_m$ si d'une part $E = F_1 + \dots + F_m$ et d'autre part les F_i sont en somme directe.
5. Soit F un sous-espace de E . Un autre sous-espace $G \subset E$ est appelé *espace supplémentaire* de F si E est la somme directe de F et G , c.à.d. $E = F \oplus G$.

Proposition 1. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$. Ainsi G est un espace supplémentaire si et seulement si $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$.

Démonstration. (i) On suppose que $F \cap G \neq \{0_E\}$. Alors il existe $x \in F \cap G$, $x \neq 0_E$. On a

$$x = x + 0_E = 0_E + x$$

Ce sont deux manières différentes d'écrire x comme la somme d'un élément de F avec un élément de G . Donc F et G ne sont pas en somme directe.

(ii) On suppose que $F \cap G = \{0_E\}$. Soit

$$x = y + z = y' + z'$$

avec $y, y' \in F$ et $z, z' \in G$. Alors $y - y' = z' - z$. D'où $y - y'$ et $z - z'$ appartient à $F \cap G$. D'où $y - y' = 0_E$ et $z - z' = 0_E$. Donc F et G sont en somme directe. $\square$

Remarque 1.1.3. 1. Il est faux de penser que $E = F \oplus G \oplus H$ si et s. si $E = F + G + H$ et $F \cap G \cap H = \{0\}$; ou même $F \cap G = \{0\}$ et $F \cap H = \{0\}$ et $G \cap H = \{0\}$ (voir le TD pour un exemple). Ainsi, l'équivalence de la proposition précédente ne se généralise pas à plus de deux sous-espaces.

2. Il y a une similitude entre famille génératrice et somme; et entre famille libre et être en somme directe. En effet, soit $v_1, \dots, v_m$ une famille de vecteurs dans E . Soient $F_i = \text{Vect}\{v_i\}$ pour tout $i = 1, \dots, m$. Alors la famille des v_i est libre si et s. si les F_i sont en somme directe; et la famille des v_i engendre E si et s. si E est la somme des F_i (exercice).

Corollaire 1. Soient $F_1, \dots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_m$. Alors $\dim E = \dim F_1 + \dots + \dim F_m$.

Pour tout $i = 1, \dots, m$, soit $\mathcal{B}_i$ une base de F_i et soit $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_m$ (n'importe quel ordre des éléments). Alors $\mathcal{B}$ est une base de E (qu'on appellera une base adaptée à la somme directe).

Démonstration. Exercice. $\square$

1.2 Applications linéaires

Définition 1.2.1. Une *application linéaire* entre deux espaces vectoriels E et F est une fonction $f : E \rightarrow F$ qui preserve les opérations algébriques :

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

Forcément $f(0_E) = 0_F$. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires entre E et F . $\mathcal{L}(E, F)$ lui-même est aussi un espace vectoriel. De plus, si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ alors la composition $g \circ f$ est une application linéaire entre E et G .

Définition 1.2.2. Un endomorphisme d'un espace vectoriel E est une application linéaire entre E et lui-même, c.a.d. $F = E$. On note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$.

On peut composer deux endomorphismes d'un même espace $u_1 \circ u_2$ et le resultat est de nouveau un endomorphisme. Autrement dit,

$$\mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \ni (u, v) \mapsto u \circ v \in \mathcal{L}(E)$$

est un produit associative et $\mathcal{L}(E)$ une algèbre associative.

On note aussi $u^0 = \text{id}$, $u^2 = u \circ u$ etc.. De plus, si $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ et u un endomorphisme de E , alors

$$P(u) := \sum_{k=0}^n a_k u^k$$

est un endomorphisme de E . Par exemple l'endomorphisme $f = u^2 + u - u^0$ est donné par

$$f(x) = u(u(x)) + u(x) - x.$$

1.2.1 Noyau, image et rang

Une application $f : E \rightarrow F$ entre deux ensembles est appelée injective si $f(x_1) = f(x_2)$ implique $x_1 = x_2$. Si E, F sont des espaces vectoriels et f est linéaire, alors f est injective si et seulement si $f(x) = 0_F$ implique $x = 0_E$. Si f n'est pas injective, l'équation $f(x) = 0_F$ admet donc des solutions $x \neq 0_E$. L'ensemble de ses solutions

$$\ker f := \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$$

est un sous-espace de E appelé le *noyau* de f et noté $\ker f$.

L'image d'une application $f : E \rightarrow F$ est l'ensemble

$$\text{im} f := \{f(x) \mid x \in E\}.$$

f est appelée surjective, si son image est égale à F . Si E, F sont des espaces vectoriels et f est linéaire alors son image est un sous-espace de F . On appelle la dimension de l'image de f le *rang* de f .

Théorème 1. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. On suppose que la dimension de E est fini. Alors

$$\dim E = \dim \ker f + \text{rang } f.$$

1.2.2 Rappel du calcul matriciel

Une *matrice* $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un tableau de scalaires qui a m lignes et n colonnes. On note $M_{mn}(\mathbb{K})$ les matrices $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Si $n = m$ on appelle la matrice aussi une matrice carrée et note $M_{nn}(\mathbb{K}) = M_n(\mathbb{K})$.

Par exemple

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

est une matrice 2×3 . Elle a deux lignes

$$L_1 = (a_{11} \ a_{12} \ a_{13}), \quad L_2 = (a_{21} \ a_{22} \ a_{23})$$

et trois colonnes

$$C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$$

On peut donc aussi écrire

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} = (C_1 \ C_2 \ C_3)$$

où encore

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = (L_i)_{1 \leq i \leq m} = (C_j)_{1 \leq j \leq n}$$

Opérations élémentaires Soit $A = (L_i)_{1 \leq i \leq m}$ une matrice de taille $m \times n$. On appelle opération de lignes élémentaire :

1. Multiplication d'une ligne avec un scalaire. On se fixe i et $\lambda \in \mathbb{K}$ et multiplie chaque coefficient de la ligne L_i avec le même scalaire λ : $L_i \mapsto \lambda L_i$. Les autres lignes restent inchangées.
2. Ajouter un multiple d'une ligne à une autre ligne. On se fixe i, j et $\lambda \in \mathbb{K}$ et ajoute à L_i la ligne λL_j . Les autres lignes restent inchangées : $L_i \mapsto L_i + \lambda L_j$. Ici l'addition des lignes $L_i + \lambda L_j$ est l'addition coefficient par coefficient.
3. Échanger deux lignes : $L_i \leftrightarrow L_j$.

Une opération de colonnes élémentaire et la même chose avec lignes et colonnes interchangées.

Transposée d'une matrice La matrice transposée de $A = (a_{ij})$ est la matrice ${}^tA = (a_{ji})$. Donc les colonnes de tA sont les lignes de A tournées 90° vers la droite et les lignes de tA sont les colonnes de A tournées 90° vers la gauche. Autrement dit, il s'agit d'une réflexion à la diagonale partant du haut à gauche vers le bas à droite.

Structure linéaire $M_{mn}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Les opérations sont coefficient par coefficient. La *matrice élémentaire* E_{ij} est la matrice dont le coefficient ij est 1 pendant que tous les autres coefficients sont 0. Une famille contenant les matrices élémentaires est libre et génératrice. En choisissant un ordre parmi ces matrices on obtient donc une base pour $M_{mn}(\mathbb{K})$.

Structure multiplicative Soit A une matrice $m \times n$ et B une matrice $n \times p$. On définit le produit AB comme la matrice C de taille $m \times p$ t.q.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

$M_n(\mathbb{K})$ est donc une algèbre associative avec une unité. L'unité est la matrice $\mathbf{1} = (\delta_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ où $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ pendant que $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$. On note l'inverse de A par A^{-1} .

1.2.3 Matrice comme application linéaire

Une matrice $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$ définit une application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^m$ de la manière suivante : Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $x = (x_j)_{1 \leq j \leq n}$ alors

$$Ax = b \quad \text{où} \quad b = (b_i)_{1 \leq i \leq m}, \quad b_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

On note que ceci a l'air comme le produit des deux matrices, si on interprète un vecteur $x \in \mathbb{K}^n$ comme une colonne, c.à.d. une matrice $n \times 1$.

Une formule utile exprime Ax à l'aide des colonnes C_i de A . Si $A = (C_j)_{1 \leq j \leq n}$ et $x = (x_j)_{1 \leq j \leq n}$ alors

$$Ax = \sum_{j=1}^n x_j C_j.$$

Les notions du noyau, de l'image et du rang sont les mêmes que pour les applications linéaires. En particulier,

$$\text{im} A = \text{Vect}\{C_1, \dots, C_n\}$$

et donc le rang de A est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de A .

Lemme 1. Soit A une matrice $n \times n$. A est inversible si et seulement si ses colonnes forment une famille libre (si et seulement si ses lignes forment une famille libre). Ceci est le cas si et seulement si $\text{rang } A = n$.

1.2.4 Matrice d'une application linéaire

Définition 1.2.3. On considère une application linéaire $f : E \rightarrow F$. Soit $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de E et $\mathcal{D} = (d_1, \dots, d_m)$ une base de F . La matrice associée à f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$ est la matrice $m \times n$ dont la j -ième colonne est $[f(b_j)]_{\mathcal{D}}$.

On trouve des notations variées pour la matrice associée à une application linéaire. Une notation utilisée en L1 était $M_{\mathcal{B}\mathcal{D}}(f)$. Une autre notation pour la matrice associée à f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$, qui joue bien avec le calcul matriciel, est $[f]_{\mathcal{D}\mathcal{B}}$ (avec les positions des bases interchangées!). Dans ce cas, on a la formule

$$[f(x)]_{\mathcal{D}} = [f]_{\mathcal{D}\mathcal{B}} [x]_{\mathcal{B}}$$

où à droite il s'agit du produit de la matrice $[f]_{\mathcal{D}\mathcal{B}}$ avec la matrice (d'une seule colonne) $[x]_{\mathcal{B}}$. De plus, si $g : F \rightarrow G$ est une autre application linéaire et $\mathcal{H} = (h_1, \dots, h_k)$ une base de G , alors

$$[g \circ f]_{\mathcal{H}\mathcal{B}} = [g]_{\mathcal{H}\mathcal{D}} [f]_{\mathcal{D}\mathcal{B}}$$

D'ailleurs, dans ce cours on ne travaillera principalement avec des endomorphismes sur un même espace vectoriel E . On n'aura besoin que de choisir une seule base, disons $\mathcal{B}$, et on pourra simplifier la notation en écrivant $M_{\mathcal{B}}(f)$ où $[f]_{\mathcal{B}}$ pour la matrice associée à f dans cette base.

1.3 Changement de la base

Considérons un espace vectoriel E et l'application identité $\text{id} : E \rightarrow E$, $\text{id}(x) = x$. Soient $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ et $\mathcal{D} = (d_1, \dots, d_n)$ deux bases pour E . Appellons $\mathcal{B}$ l'ancienne base et $\mathcal{D}$ nouvelle base. Alors $[\text{id}]_{\mathcal{D}\mathcal{B}}$ est la matrice associée à id si on prend la base $\mathcal{B}$ pour l'espace de départ et $\mathcal{D}$ pour l'espace d'arrivée. En particulier, la j ème colonne de $[\text{id}]_{\mathcal{D}\mathcal{B}}$ est $[b_j]_{\mathcal{D}}$, le vecteur b_j exprimé dans la base $\mathcal{D}$.

D'une manière similaire $[\text{id}]_{\mathcal{B}\mathcal{D}}$ est la matrice qui a comme j ème colonne le vecteur d_j exprimé dans la base $\mathcal{B}$.

Définition 1.3.1. La *matrice de passage*⁴ de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{D}$ est la matrice

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{D}} := [\text{id}]_{\mathcal{B}\mathcal{D}}$$

Ses colonnes contiennent les vecteurs de la nouvelle base $\mathcal{D}$ exprimés dans l'ancienne base $\mathcal{B}$: la j -ième colonne de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{D}$ est la colonne $[d_j]_{\mathcal{B}}$.

1.3.1 Vecteur dans la nouvelle base

La matrice de passage permet de calculer les coordonnées d'un vecteur $x \in E$ dans la base $\mathcal{B}$ à l'aide de ses coordonnées dans la base $\mathcal{D}$ et vice versa.

Lemme 2. On a

$$[x]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{D}}[x]_{\mathcal{D}}$$

et donc aussi

$$[x]_{\mathcal{D}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{D}}^{-1}[x]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{D}\mathcal{B}}[x]_{\mathcal{B}}.$$

Démonstration. Exprimons l'équation $x = \text{id}(x)$ en prenant la base $\mathcal{B}$ pour l'espace de départ de $\text{id} : E \rightarrow E$ et $\mathcal{D}$ pour l'espace d'arrivée :

$$[x]_{\mathcal{B}} = [\text{id}(x)]_{\mathcal{B}} = [\text{id}]_{\mathcal{B}\mathcal{D}}[x]_{\mathcal{D}}$$

D'où la première équation.

Comme $\text{id} = \text{id} \circ \text{id}$, on a

$$1_n = [\text{id}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = [\text{id} \circ \text{id}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = [\text{id}]_{\mathcal{B}\mathcal{D}}[\text{id}]_{\mathcal{D}\mathcal{B}}$$

donc

$$[\text{id}]_{\mathcal{B}\mathcal{D}} = [\text{id}]_{\mathcal{D}\mathcal{B}}^{-1}.$$

D'où la deuxième équation. □

Exemple : Soit $E = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = (1)$ et $\mathcal{D} = (10)$. Soit $x = 2$. Alors $[x]_{\mathcal{B}} = 2$ et $[x]_{\mathcal{D}} = \frac{1}{5}$. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{D}$ est $P_{\mathcal{B}\mathcal{D}} = (10)$, et $P_{\mathcal{D}\mathcal{B}} = (\frac{1}{10})$.

4. En anglais, on dit "change of base matrix" or "transition matrix". Attention, dans certains livres on appelle $P_{\mathcal{D}\mathcal{B}}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{D}$, au lieu de $P_{\mathcal{B}\mathcal{D}}$! Notre convention est la même que celle que vous trouvez sur Wikipedia (version française). Elle se justifie par le fait que les coefficients (p_{ij}) de $P_{\mathcal{B}\mathcal{D}}$ satisfont $d_i = \sum_j p_{ij}b_j$.

1.3.2 Application linéaire dans la nouvelle base

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire, $\mathcal{B}$ une base pour E et $\mathcal{D}$ une base pour F . On suppose connaître les coefficients $[f]_{\mathcal{D}\mathcal{B}}$ dans la base $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$. Soit $\mathcal{B}'$ une autre base de E et $\mathcal{D}'$ une base pour F . On veut calculer $[f]_{\mathcal{D}'\mathcal{B}'}$. Nous avons l'équation

$$[f]_{\mathcal{D}'\mathcal{B}'} = [\text{id} \circ f \circ \text{id}]_{\mathcal{D}'\mathcal{B}'} = [\text{id}]_{\mathcal{D}'\mathcal{D}}[f]_{\mathcal{D}\mathcal{B}}[\text{id}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{D}\mathcal{D}'}^{-1}[f]_{\mathcal{D}\mathcal{B}}P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

donc on peut obtenir la matrice dans les nouvelles bases en multipliant la matrice dans les anciennes bases avec une matrice de passage et une matrice de passage inversée. Dans le cas d'un endomorphisme $f : E \rightarrow E$ le changement de base se lit

$$[f]_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1}[f]_{\mathcal{B}}P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

la nouvelle matrice est donc obtenue à partir de l'ancienne par conjugaison avec la matrice de passage.

Chapitre 2

Déterminant

2.1 Permutations

Soit X et Y deux ensembles et $f : X \rightarrow Y$ une fonction. f est bijective si f est injective et surjective. Une fonction bijective est inversible : son inverse (ou réciproque) f^{-1} est

$$f^{-1}(y) = x, \quad \text{avec } x \in X \text{ t.q. } f(x) = y.$$

Si $Y = X$ alors on peut composer deux fonctions $f_1, f_2 : X \rightarrow X$, $f_1 \circ f_2$. Cette opération est associative. De plus, si $f : X \rightarrow X$ est bijective, alors $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{id}$. De plus, $(f_1 \circ f_2)^{-1} = f_2^{-1} \circ f_1^{-1}$ pour deux fonctions bijectives.

L'ensemble de bijections de X forment un groupe avec élément neutre id , la multiplication étant la composition des bijections. Nous intéressons ici au cas que X est un ensemble fini. Autrement dit, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection entre X et l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$. Cette bijection donne une énumération des éléments de X .

Définition 2.1.1. Une fonction bijective de X dans X est appelée une permutation de X . On note S_n le groupe des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$.

Une notation effective pour les permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$ est la suivante

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Dans cette écriture la permutation id a deux lignes égales. Pour trouver l'inverse de σ il suffit d'échanger les deux lignes et de ré-ordonner les colonnes pour obtenir l'ordre croissant dans la première ligne.

Proposition 2. S_n contient $n!$ éléments.

Démonstration. On pourrait faire une récurrence mais il suffit de compter. En effet, il y a n choix pour $\sigma(n)$. Une fois ce choix effectué, il reste $n - 1$ choix pour $\sigma(n - 1)$. Une fois $\sigma(n)$ et $\sigma(n - 1)$ fixés, il reste $n - 2$ choix pour $\sigma(n - 2)$. Lorsqu'on arrive à $\sigma(2)$, il n'y a plus que deux choix possibles et pour $\sigma(1)$ il n'y a plus qu'une seule possibilité. Ainsi le nombre total de possibilités est bien $n!$. $\square$

Définition 2.1.2. Une transposition est une permutation qui échange deux éléments et laisse les autres éléments fixes.

Dans l'écriture d'en haut, une transposition n'a donc que deux colonnes, disons la i et la j -ième, qui n'ont pas les mêmes chiffres. On note cette transposition aussi (ij) . Alors le produit

de la transposition (ij) avec la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ k_1 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$ est obtenue ainsi :

$(ij) \circ \sigma$ est obtenu en échangeant dans la deuxième ligne de σ les chiffres i et j ,
 $\sigma \circ (ij)$ est obtenu en échangeant dans la première ligne de σ les chiffres i et j et puis en ré-ordonnant les colonnes pour obtenir l'ordre croissant dans la première ligne.

Théorème 2. *Toute permutation est une composition (un produit) de transpositions.*

Démonstration. Soit $\sigma = \sigma_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ k_1 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$. Soit τ_n la permutation qui échange n avec k_n et laisse tous les autres éléments fixe (si $k_n = n$ alors $\tau_n = \text{id}$, sinon τ_n est une transposition). Alors, il existe une permutation de $\{1, \dots, n-1\}$, $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n-1 \\ k'_1 & \cdots & k'_{n-1} \end{pmatrix}$, tel que

$$\tau_n \circ \sigma_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n-1 & n \\ k'_1 & \cdots & k'_{n-1} & n \end{pmatrix}$$

On itère cette procédure : soit τ_{n-1} la permutation qui échange $n-1$ avec k'_{n-1} . Alors il existe une permutation de $\{1, \dots, n-2\}$, $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n-2 \\ k''_1 & \cdots & k''_{n-2} \end{pmatrix}$, tel que

$$\tau_{n-1} \circ \tau_n \circ \sigma_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ k''_1 & \cdots & k''_{n-2} & n-1 & n \end{pmatrix}$$

etc.. Ainsi on trouve n permutations τ_i t.q.

$$\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_n \circ \sigma_n = \text{id}.$$

Plus précisément, τ_i est une transposition ou $\tau_i = \text{id}$. Il en suit que

$$\sigma = \tau_n^{-1} \circ \cdots \circ \tau_1^{-1} = \tau_n \circ \cdots \circ \tau_1.$$

Les $\tau_i = \text{id}$ s'annulent dans cette expression, pendant que les autres τ_i sont des transpositions. Donc σ est une composition des transpositions. $\square$

Exemple 2.1.3. Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \in S_6$. Alors

$$(36) \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(14) \circ (36) \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(12) \circ (14) \circ (36) \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

D'où

$$\sigma = (36) \circ (41) \circ (12)$$

Mais aussi

$$\sigma = (12) \circ (14) \circ (36)$$

De plus

$$(12) \circ (23) \circ (12) = (13).$$

Remarque 2.1.4. Comme le montre ces exemples, la décomposition en produit de transpositions n'est pas unique (ni sur les transpositions ni sur leur nombre).

2.1.1 Signe d'une permutation

Théorème 3. *Il existe une fonction unique $\varepsilon : S_n \rightarrow \{+1, -1\}$, appelée la fonction signature, qui satisfait*

1. $\varepsilon(\sigma) = -1$ pour toute transposition σ ,
2. $\varepsilon(\sigma \circ \tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$ pour tout $\sigma, \tau \in S_n$.

Démonstration. 1. On pose

$$\varepsilon(\sigma) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

Comme

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} |\sigma(j) - \sigma(i)| = \prod_{1 \leq i < j \leq n} |j - i|$$

on a $\varepsilon(\sigma) \in \{-1, 1\}$.

Soit $\sigma = (kl)$, $k < l$. Alors $\frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = 1$ si i, j, k, l sont deux à deux distincts. Dans le produit il suffit donc de considérer les facteurs $\frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$ où un des i, j coïncide avec un des k, l , mais pas l'autre, ainsi que le facteur où $i = k$ et $j = l$. Le dernier donne $\frac{\sigma(l) - \sigma(k)}{l - k} = -1$. Donc

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma) &= - \left(\prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ i=k, j \neq l}} \frac{\sigma(j) - \sigma(k)}{j - k} \right) \left(\prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ j=k, i \neq l}} \frac{\sigma(k) - \sigma(i)}{k - i} \right) \left(\prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ i=l, j \neq k}} \frac{\sigma(j) - \sigma(l)}{j - l} \right) \left(\prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ j=l, i \neq k}} \frac{\sigma(l) - \sigma(i)}{l - i} \right) \\ &= - \left(\prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ i=k < j \neq l}} \frac{j - l}{j - k} \right) \left(\prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ i < j=k < l}} \frac{l - i}{k - i} \right) \left(\prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ k < i=l < j}} \frac{j - k}{j - l} \right) \left(\prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ j=l > i \neq k}} \frac{k - i}{l - i} \right) \end{aligned}$$

Comme $\varepsilon(\sigma)$ est un signe il suffit maintenant de compter les facteurs négatifs. Les facteurs du deuxième et troisième produit sont tous positifs. Dans le premier produit, le facteur est négatif si $k < j < l$ et dans le quatrième si $k < i < l$. Le nombre de facteurs négatifs est donc pair. Donc $\varepsilon(\sigma) = -1$.

2. Soit σ et τ deux permutations. On observe que $(\sigma(j) - \sigma(i))(j - i) = (\sigma(i) - \sigma(j))(i - j)$ et donc,

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i)))(\tau(j) - \tau(i)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\sigma(j) - \sigma(i))(j - i)$$

. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{\tau(j) - \tau(i)} &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i)))(\tau(j) - \tau(i))}{(\tau(j) - \tau(i))(\tau(j) - \tau(i))} \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(\sigma(j) - \sigma(i))(j - i)}{(j - i)(j - i)} \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \end{aligned}$$

Finalelement,

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\sigma \circ \tau) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{j - i} \\
&= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{\tau(j) - \tau(i)} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i} \\
&= \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{\tau(j) - \tau(i)} \right) \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i} \right) \\
&= \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\tau).
\end{aligned}$$

□

Corollaire 2. Soit σ une permutation. Le nombre des transpositions dans une factorisation de σ en un produit de transpositions est soit pair (dans ce cas la permutation a signe $+1$) soit impair (dans ce cas la permutation a signe -1).

A partir de cette information on trouve rapidement $\varepsilon(\text{id}) = 1$ et, pour toute permutation σ , $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$.

2.2 Déterminant d'une matrice

Définition 2.2.1. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On note $A = (a_{ij})$ avec $1 \leq i, j \leq n$. On définit le déterminant de A :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), i}$$

Ainsi $\det(A) \in \mathbb{K}$.

Autres notations.

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Exemple 2.2.2. 1. ($n = 2$) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors $\det(A) = ad - bc$. En effet, les deux permutations de S_2 sont $\sigma = \text{id}$ et $\sigma' = (12)$. On obtient alors

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} + \varepsilon(\sigma') a_{\sigma'(1),1} a_{\sigma'(2),2} \\
&= ad - cb
\end{aligned}$$

2. ($n = 3$)

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

On obtient alors

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

Proposition 3. Soit $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice block-triagonale, c.à.d. il existe $k \leq n$ tel que $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ ou $A = (a_{ij}) \in M_k(\mathbb{K})$ et $D = (d_{ij}) \in M_{n-k}(\mathbb{K})$ sont des matrice carrées et B est une matrice k fois $n - k$. Alors

$$\det(M) = \det(A) \det(D).$$

Démonstration. Une autre manière de caractériser une telle matrice block-triagonale $M = (m_{ij})$ est de dire que $m_{ij} = 0$ si $i > k$ et $j \leq k$. Supposons que c'est le cas. Alors le produit $\prod_{i=1}^n m_{\sigma(i)i}$, qui fait partie de la formule pour le déterminant, s'annule, si $\sigma(j) > k$ pour un $j \leq k$. Donc, une condition nécessaire pour que le produit est non-nul est, que σ envoie la partie $\{k+1, \dots, n\}$ en lui-même. Comme σ est une bijection ceci entraîne que σ envoie aussi la partie $\{1, \dots, k\}$ en lui-même. Donc σ doit être la composition d'une permutation σ_1 de $\{1, \dots, k\}$ avec une permutation σ_2 de $\{k+1, \dots, n\}$. Il en suit que

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n m_{\sigma(i)i} &= \sum_{\sigma_1 \in S_k} \sum_{\sigma_2 \in S_{n-k}} \varepsilon(\sigma_1 \sigma_2) \prod_{i=1}^k m_{\sigma_1(i)i} \prod_{i=k+1}^n m_{\sigma_2(i)i} \\ &= \left(\sum_{\sigma_1 \in S_k} \varepsilon(\sigma_1) \prod_{i=1}^k a_{\sigma_1(i)i} \right) \left(\sum_{\sigma_2 \in S_{n-k}} \varepsilon(\sigma_2) \prod_{i=k+1}^n d_{\sigma_2(i)-k, i-k} \right) \\ &= \det(A) \det(D). \end{aligned}$$

□

Corollaire 3. Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire. Alors

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

Proposition 4. Le déterminant est une application multilinéaire alternée en les colonnes, c'est-à-dire : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et soient $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A .

1. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. On suppose qu'il existe des colonnes C, C' et des scalaires $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$ tels que $C_i = \lambda C + \lambda' C'$. Alors

$$\det(A) = \lambda \det(C_1 \cdots \underbrace{C}_{\text{position } i} \cdots C_n) + \lambda' \det(C_1 \cdots \underbrace{C'}_{\text{position } i} \cdots C_n).$$

2. Soient $i, j \in \{1, \dots, n\}$ avec $i \neq j$. Soit B la matrice obtenue en échangeant les colonnes C_i et C_j dans A (i.e. la colonne i de B est C_j et la colonne j de B est C_i , les autres colonnes étant les mêmes que dans A).

Alors $\det(B) = -\det(A)$.

Démonstration. 1. Notons $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ et $C' = \begin{pmatrix} c'_1 \\ \vdots \\ c'_n \end{pmatrix}$. Notons aussi B la matrice obtenue en remplaçant, dans A , la colonne C_i par C . De même, B' la matrice obtenue en remplaçant C_i par C' . L'hypothèse nous dit que pour tout $k = 1, \dots, n$, $a_{ki} = \lambda c_k + \lambda' c'_k$. Par

conséquent

$$\begin{aligned}
 \det(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(i),i} \cdots a_{\sigma(n),n} \\
 &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots (\lambda c_{\sigma(i)} + \lambda' c'_{\sigma(i)}) \cdots a_{\sigma(n),n} \\
 &= \lambda \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots c_{\sigma(i)} \cdots a_{\sigma(n),n} + \lambda' \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots c'_{\sigma(i)} \cdots a_{\sigma(n),n} \\
 &= \lambda \det(B) + \lambda' \det(B').
 \end{aligned}$$

2. Considérons la transposition $\tau = (i \ j) \in S_n$. La matrice B est alors $(C_{\tau(1)} \cdots C_{\tau(n)})$. On a :

$$\begin{aligned}
 \det(B) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),\tau(i)} \\
 &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(\tau^{-1}(\tau(i))),\tau(i)} \\
 &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(\tau^{-1}(i)),i} \\
 &= \varepsilon(\tau) \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma \circ \tau^{-1}) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(\tau^{-1}(i)),i} \\
 &= \varepsilon(\tau) \det(C_1 \cdots C_n) \\
 &= -\det(A).
 \end{aligned}$$

□

La même démonstration que précédemment permet de prouver la proposition suivante.

Proposition 5. Soient $C_1, \dots, C_n$ les colonnes d'une certaine matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$. Soit $\tau \in S_n$, alors

$$\det(C_{\tau(1)} \cdots C_{\tau(n)}) = \varepsilon(\tau) \det(C_1 \cdots C_n).$$

Remarque 2.2.3. L'application $\det$ n'est pas linéaire. En fait,

1. pour $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
2. pour $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, en général on a $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$.

Démonstration. 1. Si on note C_i les colonnes de A alors $\det(\lambda A) = \det(\lambda C_1 \ \lambda C_2 \cdots \lambda C_n) = \lambda \det(C_1 \ \lambda C_2 \cdots \lambda C_n) = \lambda^2 \det(C_1 \ C_2 \cdots \lambda C_n) = \cdots$.

2. Voici un contre-exemple : $\det(I_n + I_n) = \det(2I_n) = 2^n \det(I_n) = 2^n$ alors que $\det(I_n) + \det(I_n) = 2$. Les deux termes sont différents si $n \geq 2$.

□

Proposition 6. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice ayant deux colonnes égales. Alors $\det(A) = 0$.

Démonstration. Par hypothèse, il existe $i \neq j$ tel que les colonnes C_i et C_j soient égales. La matrice obtenue en échangeant ces colonnes est encore égale à A . Par la prop. 4, on obtient alors $\det(A) = -\det(A)$ ce qui donne $\det(A) = 0$.

□

Proposition 7. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors $\det({}^t A) = \det(A)$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 \det({}^t A) &= \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)} \\
 &= \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma^{-1}(\sigma(i)), \sigma(i)} \\
 &= \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma^{-1}(j), j} \\
 &= \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma^{-1}) \prod_{i=1}^n a_{\sigma^{-1}(j), j} \\
 &= \det(A)
 \end{aligned}$$

□

Corollaire 4. *Le déterminant est multilinéaire en les lignes. De plus si τ est une permutation des lignes de A alors le déterminant de la matrice obtenue en permutant les lignes à l'aide de τ est égal à $\varepsilon(\tau) \det(A)$.*

Démonstration. Ces propriétés sont vraies pour les colonnes et la prop. précédente permet de les avoir pour les lignes. □

Théorème 4. *Pour $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.*

Démonstration. Notons $A = (a_{ij}) = (A_1 \cdots A_n)$, $B = (b_{ij})$, $C = AB = (c_{ij}) = (C_1 \cdots C_n)$ de sorte que $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$. On a alors

$$C_k = \begin{pmatrix} c_{1k} \\ \vdots \\ c_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} b_{jk} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} b_{jk} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n b_{jk} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n b_{jk} A_j.$$

D'où

$$\begin{aligned}
 \det(AB) &= \det(C_1 \ C_2 \cdots C_n) \\
 &= \det\left(\sum_{i_1=1}^n b_{i_1,1} A_{i_1} \quad \sum_{i_2=1}^n b_{i_2,2} A_{i_2} \quad \cdots \quad \sum_{i_n=1}^n b_{i_n,n} A_{i_n}\right) \\
 &\stackrel{\text{Prop. 4}}{=} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq n} b_{i_1,1} b_{i_2,2} \cdots b_{i_n,n} \det(A_{i_1} \ A_{i_2} \cdots A_{i_n}).
 \end{aligned}$$

Dans cette somme, dès que deux i_j sont égaux, on obtient deux colonnes égales et le terme disparaît. Il ne reste que les termes où $i_1, \dots, i_n$ sont distincts deux à deux. Autrement dit les termes pour lesquelles $(i_1, \dots, i_n)$ est une permutation de $\{1, \dots, n\}$. On note alors $i_1 = \sigma(1) \dots, i_n = \sigma(n)$ et on peut réécrire

$$\begin{aligned}
 \det(AB) &= \sum_{\sigma \in S_n} b_{\sigma(1),1} b_{\sigma(2),2} \cdots b_{\sigma(n),n} \det(A_{\sigma(1)} \cdots A_{\sigma(n)}) \\
 &\stackrel{\text{Prop. 5}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} b_{\sigma(1),1} b_{\sigma(2),2} \cdots b_{\sigma(n),n} \varepsilon(\sigma) \det(A_1 \cdots A_n) \\
 &= \det(B) \det(A).
 \end{aligned}$$

□

Théorème 5. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, alors

$$\det(A) \neq 0 \iff A \text{ est inversible.}$$

Démonstration. " $\Leftarrow$ " : Soit B l'inverse de A alors $AB = I_n$ et $1 = \det(I_n) = \det(AB) = \det(A)\det(B)$ d'où $\det(A) \neq 0$.

" $\Rightarrow$ " : Par contraposée, on suppose A non inversible donc les colonnes C_i de A sont liées. Quitte à faire un échange de colonnes, on peut supposer que $C_1 = \lambda_2 C_2 + \dots + \lambda_n C_n$ avec $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Par conséquent $\det(A) = \det(\sum_{i=2}^n \lambda_i C_i \quad C_2 \quad \dots \quad C_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \det(C_i \quad C_2 \quad \dots \quad C_n) = 0$. $\square$

Corollaire 5. Si A est une matrice inversible, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Démonstration. Si A est inversible, alors $AA^{-1} = I_n$. Donc

$$1 = \det(I_n) = \det(A)\det(A^{-1}).$$

$\square$

2.2.1 Déterminant d'un endomorphisme

Dans ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n et $u : E \rightarrow E$ un endomorphisme de E .

Lemme 3. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $A = M_{\mathcal{B}}(u)$ et $A' = M_{\mathcal{B}'}(u)$. Alors $\det(A) = \det(A')$.

Démonstration. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Alors $A' = P^{-1}AP$ et on a $\det(A') = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = (\det(P))^{-1}\det(P)\det(A) = \det(A)$. $\square$

Définition 2.2.4. On définit le déterminant de u comme étant le déterminant de la matrice de u dans n'importe quelle base de E .

Le lemme précédent nous assure que cette définition ne dépend pas du choix de la base.

Nous donnons les deux propositions suivantes sans démonstrations car ces dernières sont faciles ou triviales.

Proposition 8. On a les équivalences suivantes : u est bijectif $\iff u$ est injectif $\iff u$ est surjectif $\iff \det(u) \neq 0$.

Proposition 9. Soient u et v deux endomorphismes de E . On a

1. $\det(u \circ v) = \det(u)\det(v)$,
2. $\det(\text{Id}_E) = 1$,
3. Si u est inversible alors $\det(u^{-1}) = (\det(u))^{-1}$.

2.3 Calcul pratique du déterminant

On utilise très rarement la formule dans la définition du déterminant pour le calculer. Voici quelques stratégies pour le calcul pratique d'un déterminant.

2.3.1 Par transformations élémentaires de la matrice

Une manière efficace passe par l'application des transformations élémentaires à la matrice pour la rendre triangulaire. Bienque le déterminant n'est pas invariant sous transformation élémentaire, il ne peut changer que d'un signe, et ce signe peut être déterminé.

Proposition 10. 1. Le déterminant est opposé si on échange deux lignes ou deux colonnes.
2. Si on remplace une colonne C (resp. une ligne L) par $C +$ "une combinaison linéaire des autres" (resp. $L + \dots$) alors le déterminant ne change pas.

Démonstration. 1. Déjà vu pour les colonnes et l'égalité $\det(A) = \det({}^t A)$ l'implique pour les lignes.

2. Faisons la preuve pour $C = C_1$. Remplaçons alors C_1 par $C_1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i C_i$,

$$\begin{aligned} \det(C_1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i C_i \quad C_2 \quad \dots \quad C_n) &= \det(C_1 \quad C_2 \quad \dots \quad C_n) + \sum_{i=2}^n \lambda_i \det(C_i \quad C_2 \quad \dots \quad C_n) \\ &= \det(C_1 \quad C_2 \quad \dots \quad C_n). \end{aligned}$$

□

2.3.2 Developpement du déterminant lelong d'une colonne ou ligne

Une autre méthode de calcul est le developpement du déterminant lelong une colonne ou ligne. Elle repose sur le

Lemme 4.

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{k-1} \begin{vmatrix} a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-1,2} & \dots & a_{k-1,n} \\ a_{k+1,2} & \dots & a_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Démonstration. Si $k = 1$ alors le résultat découle de la Prop. 3. Si $k > 1$ on échange la k -ième avec la $k - 1$ -ième ligne; en conséquence le déterminant prend un signe $-$. On itère jusqu'en arrivant à une matrice où les 0 de la première colonne sont tous en bas. Ca fait $k - 1$ opérations d'échange. D'où le resultat. □

Corollaire 6.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} a_{k1} \begin{vmatrix} a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-1,2} & \dots & a_{k-1,n} \\ a_{k+1,2} & \dots & a_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Démonstration. Comme le déterminant est linéaire dans les colonnes on a

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n a_{k1} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

et le résultat découle du dernier lemme. $\square$

Grâce à la transposition, on a un résultat similaire avec les lignes. De plus, en tenant compte d'un signe (notamment $(-1)^{j-1}$) on a un résultat similaire en développant le long la j -ième colonne. Relié à cela est la notion du cofacteur d'une matrice :

Soit $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ et $k, l \leq n$. Si on enlève la k -ième ligne et la l -ième colonne on obtient une matrice notée $\tilde{M}_{kl}$ de taille $n-1 \times n-1$.

$$M = \begin{pmatrix} A & \vdots & B \\ \cdots & \cdot & \cdots \\ C & \vdots & D \end{pmatrix}_k, \quad \tilde{M}_{kl} := \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

ou

$A = (a_{ij}) \in M_{k-1, l-1}(\mathbb{K})$ avec $a_{ij} = m_{ij}$, $i < k$, $j < l$,

$B = (b_{ij}) \in M_{k-1, n-l}(\mathbb{K})$ avec $b_{ij} = m_{ij}$, $i < k$, $j > l$

$C = (c_{ij}) \in M_{n-k, l-1}(\mathbb{K})$ avec $c_{ij} = m_{ij}$, $i > k$, $j < l$

$D = (d_{ij}) \in M_{n-k, n-l}(\mathbb{K})$ avec $d_{ij} = m_{ij}$, $i > k$, $j > l$

Définition 2.3.1. Le nombre

$$M_{kl} := (-1)^{k+l} \det(\tilde{M}_{kl})$$

est appelé le cofacteur d'indice (k, l) de M .¹

Théorème 6. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Pour tout $k = 1, \dots, n$,

$$\det(A) = a_{k1}A_{k1} + \cdots + a_{kn}A_{kn}. \quad (2.1)$$

Pour tout $j = 1, \dots, n$,

$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}. \quad (2.2)$$

Démonstration. La première expression est le développement du déterminant le long la k -ième ligne. La deuxième expression est le développement du déterminant le long la j -ième colonne.

D'abord on observe que la deuxième formule correspond, si $j = 1$, au cas du Cor. 6. Pour j quelconque on obtient la deuxième formule par application des échanges de colonnes : d'abord j avec $j-1$, puis $j-1$ avec $j-2$, etc.. Après $j-1$ échanges on obtient de nouveau le cas du Cor. 6. Chaque échange amène à un signe -1 . De plus, la j -ième colonne est devenu la première et les autres colonnes ont gardées leur ordre. D'où la formule (2.2) (le signe est déjà pris en charge par le signe dans la définition du cofacteur).

La formule (2.1) peut être obtenu par transposition de (2.2). $\square$

1. Le nombre $\det(\tilde{M}_{kl})$ est aussi appelé mineur de d'ordre $n-1$ d'indice (k, l) . On ne parlera pas de mineurs d'ordre $< n-1$ dans ce cours.

2.4 Une formule pour l'inverse d'une matrice

On peut exprimer l'inverse A^{-1} , sous l'hypothèse que $\det(A) \neq 0$, à l'aide des cofacteurs. Bien que cette formule devienne lourde si la dimension augmente, elle est utile théoriquement.

Définition 2.4.1. La comatrice de la matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est la matrice $\text{co}(A) \in M_n(\mathbb{K})$, qui a comme coefficient ij le cofacteur de A d'indice (i, j) ,

$$\text{co}(A) := (A_{ij}).$$

Le transposé de la comatrice est alors ${}^t\text{co}(A) = (A_{ji})$.

Théorème 7. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors

$$A {}^t\text{co}(A) = {}^t\text{co}(A)A = \det(A)I_n.$$

Corollaire 7. Si A est inversible alors $A^{-1} = \det(A)^{-1} {}^t\text{co}(A)$.

Démonstration du théorème. Comme d'habitude on note a_{ij} les coefficients de A et A_{ij} les cofacteurs associés à A . Pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on considère

$$\Gamma_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn}.$$

- Si $i = j$ alors $\Gamma_{ij} = \det(A)$: en effet, c'est le développement du déterminant par rapport à la ligne i .
- Si $i \neq j$ alors $\Gamma_{ij} = 0$. En effet, soit B la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la ligne j par la ligne i (les lignes autres que la ligne j étant celles de A). Alors d'une part $\det(B) = 0$ et d'autre part si on développe $\det(B)$ par rapport à la ligne j , on obtient Γ_{ij} .

Par conséquent : $\Gamma_{ij} = \delta_{ij} \det(A)$.

Le membre de gauche est le coefficient (i, j) de $A {}^t\text{co}(A)$ et le membre de droite est le coefficient (i, j) de $\det(A) I_n$. On a donc démontré que $A {}^t\text{co}(A) = \det(A) I_n$.

Pour obtenir l'égalité ${}^t\text{co}(A) A = \det(A) I_n$ on fait la même chose en utilisant $\Gamma'_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{kj}A_{ik}$. $\square$

2.4.1 Formules de Cramer

Théorème 8. Soient $a_{ij} \in \mathbb{K}$ avec $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Soient $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$. On considère le système suivant

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Notons $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in M_{n \times 1}(\mathbb{K})$. Si $\det(A) \neq 0$ alors l'unique solution du

système est donnée par

$$x_i = \frac{\det(C_1 \cdots C_{i-1} \ B \ C_{i+1} \cdots C_n)}{\det(A)}$$

où C_i désigne la colonne i de A .

Démonstration. Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n \times 1}(\mathbb{K})$ l'unique solution du système $AX = B$. On a donc $B = x_1 C_1 + \cdots + x_n C_n$ d'où

$$\begin{aligned} \det(C_1 \cdots C_{i-1} \ B \ C_{i+1} \cdots C_n) &= \sum_{j=1}^n x_j \det(C_1 \cdots C_{i-1} \ C_j \ C_{i+1} \cdots C_n) \\ &= x_i \det(C_1 \cdots C_{i-1} \ C_i \ C_{i+1} \cdots C_n) \\ &= x_i \det(A). \end{aligned}$$

□