Université Claude Bernard Lyon 1
Année 2022-2023
Automne 2022

L2 UE Algèbre III
Séquence 3

Algèbre III

Notes du cours

version du 26 septembre 2022

Johannes Kellendonk

Table des matières

1 Espaces vectoriels et applications linéaires **5**

1.1 Espaces vectoriels . . . 5

1.1.1 Bases . . . 6

1.1.2 Somme directe . . . 7

1.2 Applications linéaires . . . 8

1.2.1 Noyau, image et rang . . . 8

1.2.2 Rappel du calcul matriciel . . . 9

1.2.3 Matrice comme application linéaire . . . 10

1.2.4 Matrice d'une application linéaire . . . 10

1.3 Changement de la base . . . 11

1.3.1 Vecteur dans la nouvelle base . . . 11

1.3.2 Application linéaire dans la nouvelle base . . . 12

2 Déterminant **13**

2.1 Permutations . . . 13

2.1.1 Signe d'une permutation . . . 15

2.2 Déterminant d'une matrice . . . 16

2.2.1 Déterminant d'un endomorphisme . . . 20

2.3 Calcul pratique du déterminant . . . 21

2.3.1 Par transformations élémentaires de la matrice . . . 21

2.3.2 Developpement du déterminant lelong d'une colonne ou ligne . . . 21

2.4 Une formule pour l'inverse d'une matrice . . . 23

2.4.1 Formules de Cramer . . . 23

3 Equation propre et spectre d'un endomorphisme **25**

3.1 Valeur, vecteur, espace propre . . . 25

3.2 Endomorphismes diagonalisables . . . 26

3.3 Polynôme caractéristique . . . 27

3.3.1 Algorithme de diagonalisation . . . 30

Chapitre 1

Espaces vectoriels et applications linéaires

Dans cette section on rappelle (sans preuves) les notions de l'Algèbre Linéaire vu en L1.

1.1 Espaces vectoriels

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, où $\mathbb{C}$ (plus généralement, $\mathbb{K}$ peut être un corps). Un *espace vectoriel* E sur $\mathbb{K}$ est un ensemble muni de deux operations algébriques : la somme de deux vecteurs et la multiplication avec un scalaire (un élément de $\mathbb{K}$)

$$\begin{array}{rcl} E \times E \ni (x, y) & \mapsto & x + y \in E \\ \mathbb{K} \times E \ni (\lambda, x) & \mapsto & \lambda x \in E \end{array}$$

Ces deux opérations satisfont certaines axioms comme la commutativité de l'addtion, l'associativité et une forme de distributivité. [1] En particulier, E contient le *vecteur zero* 0_E, qui satisfait $x + 0_E = x$ et $x + (-x) = 0_E$.

En appliquant plusieurs fois ces opérations à des vecteurs $x_1, \cdots, x_n \in E$ et scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, on obtient un nouveau vecteur $x \in E$, qui est une *combinaison linéaire* des x_i

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n.$$

On note $\mathrm{Vect}\{x_1, \cdots, x_n\}$ l'espace de toutes les combinaisons linéaires qu'on peut fabriquer (engendrer) avec les vecteurs x_1 à x_n)

$$\mathrm{Vect}\{x_1, \cdots, x_n\} = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n | \lambda_i \in \mathbb{K}\}.$$

Exemples d'espaces vectoriels sont $\{0\}$, $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ (polynômes d'une variable X de degré $\leq n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$) où $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ (toutes les fonctions sur une ensemble X à valeur dans $\mathbb{K}$). Un vecteur n'est donc pas toujours une "fleche", mais peut être n'importe quoi. On dit souvent aussi *espace linéaire* à la place de espace vectoriel.

---

1. Les axioms d'un espace vectoriel E :
   1. $\forall x, y \in E : x + y = y + x$
   2. $\forall x, y, z \in E : (x + y) + z = x + (y + z)$
   3. E contient un élément 0_E t.q. $\forall x \in E : x + 0_E = x$
   4. $\forall x \in E : 0x = 0_E$ (ici $0 \in \mathbb{K}$)
   5. $\forall x \in E : 1x = x$ (ici $1 \in \mathbb{K}$)
   6. $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
   7. $\forall x \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
   8. $\forall x \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$

1.1.1 Bases

Soit E un espace vectoriel. Une famille $\{x_1, \cdots, x_n\} \subset E$ est dite *libre* (où *linéairement indépendantes*) si l'èquation (avec les variables $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$)

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0_E$$

n'admet que la solution $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Si $\{x_1, \cdots, x_n\}$ n'est pas libre, on l'appelle aussi famille *liée*, et dans ce cas il existe i t.q. x_i est combinaison linéaire des autres x_j, $j \neq i$.

Une famille $\{x_1, \cdots, x_n\} \subset E$ est dite *génératrice* si tout élément x de E est combinaison linéaire des x_i, c.a.d. ils existent $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ t.q.

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$$

Autrement dit, $\{x_1, \cdots, x_n\} \subset E$ est génératrice si $\mathrm{Vect}\{x_1, \cdots, x_n\} = E$.

Définition 1.1.1. Une *base* pour l'espace vectoriel E est une famille ordonnée[2] de E, qui est *libre et génératrice.*

Étant donnée une base $\mathcal{B} = (b_1, \cdots, b_n)$ de E on peut écrire chaque $x \in E$ *d'une manière unique* comme combinaison linéaire des $b_1, \cdots, b_n$,

$$x = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n$$

où $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Les scalaires λ_i s'appellent les *coefficients* (ou *coordonnées* ou *composantes*) de x dans la base $\mathcal{B}$ et on écrit[3]

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Une procedure inductive de construire une base pour E est la suivante : Si E n'est pas trivial, alors il contient un élément $v_1 \neq 0_E$. $\{v_1\}$ est une famille libre. On peut agrandir une famille libre $\{v_1, \cdots, v_k\}$ qui n'engendre pas E en choisissant un vecteur $x \in E \backslash \mathrm{Vect}\{v_1, \cdots, v_k\}$. Ainsi on obtient une famille libre $\{v_1, \cdots, v_k, v_{k+1} = x\}$ avec un element de plus. Cette procédure doit s'arrêter si $E \backslash \mathrm{Vect}\{v_1, \cdots, v_k\} = \emptyset$. En particulier, toute famille libre $\{v_1, \cdots, v_k\}$, peut être completée en une base pour E.

Il est important de réaliser qu'une base pour E n'est jamais unique (sauf dans le cas ou E est trivial, c.à.d. $E = \{0_E\}$). Par contre, la taille de la base (le nombre des éléments) est uniquement déterminée par E. Elle peut d'ailleurs être infinie, notament si la precédure d'en haut ne s'arrête pas. Cette taille est appellée la *dimension* de E, notée $\dim E$.

On rappelle que $\mathbb{K}^n := \overbrace{\mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}}^{n-fois}$ et qu'on note ses vecteurs $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ et appelle les λ_i les coordonnées du vecteur. La base *canonique* de $\mathbb{K}^n$ est $(e_1, \cdots, e_n)$ avec $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0)$ etc.. Dans la base canonique $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ s'écrit comme le vecteur colonne $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$. Un vecteur colonne peut donc être vu comme un vecteur de $\mathbb{K}^n$ exprimé dans la base canonique. L'application $E \ni x \mapsto [x]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{K}^n$ est une bijection linéaire (un *isomorphisme d'espaces vectoriels*) entre E et $\mathbb{K}^n$. Toute espace vectoriel (sur $\mathbb{K}$) de dimension n est alors isomorphe à $\mathbb{K}^n$. Il est important de se rendre compte que l'isomorphisme dépend de la base $\mathcal{B}$.

2. Une famille ordonnée est une suite déléments $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ (ou $(b_1, b_2, \cdots)$ si la famille est infinie). On trouve aussi la notation avec des accolades $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ pour une base.

3. On trouve aussi l'écriture en ligne $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ car elle est plus compacte dans un texte, mais pour le calcul matriciel il est plus astucieux d'écrire les éléments en colonne.

1.1.2 Somme directe

Soit E un espace vectoriel. Une partie $F \subset E$ est apellée *sous-espace* de E, si $\forall x, y \in F$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$

$$x + y \in F, \qquad \lambda x \in F$$

Définition 1.1.2. Soient $F_1, \ldots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de E.

1. On définit la somme des F_i :

$$\begin{aligned} F_1 + \cdots + F_m &= \{f_1 + \cdots + f_m \mid \forall i = 1, \ldots, m,\ f_i \in F_i\} \\ &= \{e \in E \mid \exists f_1 \in F_1, \ldots, \exists f_m \in F_m,\ e = f_1 + \cdots + f_m\} \end{aligned}$$

   Cet ensemble est un sous-espace vectoriel de E (exercice).

2. On dit que les F_i sont en somme directe et on écrit $F_1 + \cdots + F_m = F_1 \oplus \cdots \oplus F_m$ si, dans l'écriture de e comme somme $e = f_1 + \cdots + f_m$, le choix des f_i est unique. Autrement dit, l'équation $f_1 + \cdots + f_m = 0$, avec $f_i \in F_i$, n'a que la solution $f_i = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, m$.
3. On dit que E est la somme des F_i si $E = F_1 + \cdots + F_m$.
4. On dit que E est la somme directe des F_i et on l'écrit sous la forme $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_m$ si d'une part $E = F_1 + \cdots + F_m$ et d'autre part les F_i sont en somme directe.
5. Soit F un sous-espace de E. Un autre sous-espace $G \subset E$ est appellé espace supplémentaire de F si E est la somme direct de F et G, c.à.d. $E = F \oplus G$.

Proposition 1. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$. Ainsi G est un espace supplémentaire si et seulement si $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$.*

Démonstration. (i) On suppose que $F \cap G \neq \{0_E\}$. Alors il existe $x \in F \cap G$, $x \neq 0_E$. On a

$$x = x + 0_E = 0_E + x$$

Ce sont deux manières différentes d'écrire x comme la somme d'un élément de F avec un élément de G. Donc F et G ne sont pas en somme directe.

(ii) On suppose que $F \cap G = \{0_E\}$. Soit

$$x = y + z = y' + z'$$

avec $y, y' \in F$ et $z, z' \in G$. Alors $y - y' = z' - z$. D'où $y - y'$ et $z - z'$ appartient à $F \cap G$. D'où $y - y' = 0_E$ et $z - z' = 0_E$. Donc F et G sont en somme directe. □

Remarque 1.1.3.

1. *Il est faux de penser que $E = F \oplus G \oplus H$ si et s. si $E = F + G + H$ et $F \cap G \cap H = \{0\}$; ou même $F \cap G = \{0\}$ et $F \cap H = \{0\}$ et $G \cap H = \{0\}$ (voir le TD pour un exemple). Ainsi, l'équivalence de la proposition précédente ne se généralise pas à plus de deux sous-espaces.*
2. *Il y a une similitude entre famille génératrice et somme ; et entre famille libre et être en somme directe. En effet, soit $v_1, \ldots, v_m$ une famille de vecteurs dans E. Soient $F_i = \mathrm{Vect}\{v_i\}$ pour tout $i = 1, \ldots, m$. Alors la famille des v_i est libre si et s. si les F_i sont en somme directe ; et la famille des v_i engendre E si et s. si E est la somme des F_i (exercice).*

Corollaire 1. *Soient $F_1, \ldots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_m$. Alors $\dim E = \dim F_1 + \cdots \dim F_m$.*

Pour tout $i = 1, \ldots, m$, soit $\mathcal{B}_i$ une base de F_i et soit $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_m$ (n'importe quel ordre des éléments). Alors $\mathcal{B}$ est une base de E (qu'on appellera une base adaptée à la somme directe).

Démonstration. Exercice. □

1.2 Applications linéaires

Définition 1.2.1. Une *application linéaire* entre deux espaces vectoriels E et F est un fonction $f : E \to F$ qui preserve les opérations algébriques :

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

Forcément $f(0_E) = 0_F$. On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires entre E et F. $\mathcal{L}(E,F)$ lui-même est aussi un espace vectoriel. De plus, si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ alors la composition $g \circ f$ est une application linéaire entre E et G.

Définition 1.2.2. Un endomorphisme d'un espace vectoriel E est une application linéaire entre E et lui-même, c.a.d. $F = E$. On note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$.

On peut composer deux endomorphismes d'un même espace $u_1 \circ u_2$ et le resultat est de nouveau un endomorphisme. Autrement dit,

$$\mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \ni (u,v) \mapsto u \circ v \in \mathcal{L}(E)$$

est un produit associative et $\mathcal{L}(E)$ une algèbre associative.

On note aussi $u^0 = \mathrm{id}$, $u^2 = u \circ u$ etc.. De plus, si $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_n X^n$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ et u un endomorphisme de E, alors

$$P(u) := \sum_{k=0}^{n} a_n u^n$$

est un endomorphisme de E. Par exemple l'endomorphisme $f = u^2 + u - u^0$ est donné par

$$f(x) = u(u(x)) + u(x) - x.$$

1.2.1 Noyau, image et rang

Une application $f : E \to F$ entre deux ensembles est appellée injective si $f(x_1) = f(x_2)$ implique $x_1 = x_2$. Si E, F sont des espaces vectoriels et f est linéaire, alors f est injective si et seulement si $f(x) = 0_F$ implique $x = 0_E$. Si f n'est pas injective, l'équation $f(x) = 0_F$ admet donc des solutions $x \neq 0_E$. L'ensemble de ses solutions

$$\ker f := \{x \in E | f(x) = 0_E\}$$

est un sous-espace de E appellé le *noyau* de f et noté $\ker f$.

L'image d'une application $f : E \to F$ est l'ensemble

$$\mathrm{im} f := \{f(x) | \, x \in E\}.$$

f est appellée surjective, si son image est égale à F. Si E, F sont des espaces vectoriels et f est linéaire alors son image est un sous-espace de F. On appelle la dimension de l'image de f le *rang* de f.

Théorème 1. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On suppose que la dimension de E est fini. Alors*

$$\dim E = \dim \ker f + \mathrm{rang}\ f.$$

1.2.2 Rappel du calcul matriciel

Une *matrice* $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un tableau de scalaires qui a m lignes et n colonnes. On note $M_{mn}(\mathbb{K})$ les matrices $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Si $n = m$ on apelle la matrice aussi une matric carrée et note $M_{nn}(\mathbb{K}) = M_n(\mathbb{K})$.

Par exemple

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

est une matrice 2×3. Elle a deux lignes

$$L_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

et trois colonnes

$$C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$$

On peut donc aussi écrire

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}$$

où encore

$$A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} = \left(L_i\right)_{1\leq i\leq m} = \left(C_j\right)_{1\leq j\leq n}$$

Operations élémentaires Soit $A = \left(L_i\right)_{1\leq i\leq m}$ une matrice de taille $m\times n$. On appelle operation de lignes élémentaire :

1. Multiplication d'une ligne de avec un scalaire. On se fixe i et $\lambda \in \mathbb{K}$ et multiplie chaque coefficient de la ligne L_i avec le même scalaire λ : $L_i \mapsto \lambda L_i$. Les autres lignes reste inchangées.
2. Ajouter un multiple d'une ligne à une autre ligne. On se fixe i, j et $\lambda \in \mathbb{K}$ et ajoute à L_i la ligne λL_j. Les autres lignes restent inchangées : $L_i \mapsto L_i + \lambda L_j$. Ici l'addition des lignes $L_i + \lambda L_j$ est l'addition coefficient par coefficient.
3. Échanger deux lignes : $L_i \leftrightarrow L_j$.

Une operation de colonnes élémentaire et la même chose avec lignes et colonnes interchangées.

Transposée d'une matrice La matrice transposée de $A = (a_{ij})$ est la matrice ${}^tA = (a_{ji})$. Donc les colonnes de ${}^tA$ sont les lignes de A tournées 90^0 vers la droite et les lignes ${}^tA$ sont les colonnes de A tournées 90^0 vers la gauche. Autrement dit, il s'agit d'une reflection à la diagonale partant du haut à gauche vers le bas à droite.

Structure linéaire $M_{mn}(\mathbb{K})$ est une espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Les operations sont coefficient par coefficient. La *matrice élémentaire* E_{ij} est la matrice dont le coefficient ij est 1 pendant que tous les autres coefficients sont 0. Une famille contenant les matrices élémentaires est libres et géneratrice. En choisissant une ordre parmi ces matrices on obtient donc une base pour $M_{mn}(\mathbb{K})$.

Structure multiplicative Soit A une matrice $m \times n$ et B une matrice $n \times p$. On définie le produit AB comme la matrice C de taille $m \times p$ t.q.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

$M_n(\mathbb{K})$ est donc une algèbre associative avec une unité. L'unité est la matrice $\mathbf{1} = \left(\delta_{ij}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ où $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ pendant que $\delta_{ij} = 1$ si $i \neq j$. On note l'inverse de A par A^{-1}.

1.2.3 Matrice comme application linéaire

Une matrice $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$ definit une application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^m$ de la manière suivante : Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $x = (x_j)_{1 \leq j \leq n}$ alors

$$Ax = b \quad \text{où} \quad b = (b_i)_{1 \leq i \leq m}, \; b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

On note que ceci a l'air comme le produit des deux matrices, si on interprète un vecteur $x \in \mathbb{K}^n$ comme une colonne, c.à.d. une matrice $n \times 1$.

Une formule utile exprime Ax a l'aide des colonnes C_i de A. Si $A = (C_j)_{1 \leq j \leq n}$ et $x = (x_j)_{1 \leq j \leq n}$ alors

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j C_j.$$

Les notions du noyau, de l'image et du rang sont les mêmes que pour les applications linéaires. En particulier,

$$\mathrm{im} A = \mathrm{Vect}\{C_1, \cdots, C_n\}$$

et donc le rang de A est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de A.

Lemme 1. *Soit A une matrice $n \times n$. A est inversible si et seulement si ses colonnes forment une famille libre (si et seulement si ses lignes forment une famille libre). Ceci est le cas si et seulement si* rang $A = n$.

1.2.4 Matrice d'une application linéaire

Définition 1.2.3. On considère une application linéaire $f : E \to F$. Soit $\mathcal{B} = (b_1, \cdots, b_n)$ une base de E et $\mathcal{D} = (d_1, \cdots, d_m)$ une base de F. La *matrice associée à f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$* est la matrice $m \times n$ dont la j-ième colonne est $[f(b_j)]_{\mathcal{D}}$.

On trouve des notations variées pour la matrice associée à une application linéaire. Une notation utlisée en L1 était $M_{\mathcal{BD}}(f)$. Une autre notation pour la matrice associée à f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$, qui joue bien avec le calcul matriciel, est $[f]_{\mathcal{DB}}$ (avec les positions des bases interchangées !). Dans ce cas, on a la formule

$$[f(x)]_{\mathcal{D}} = [f]_{\mathcal{DB}} [x]_{\mathcal{B}}$$

où à droite il s'agit du produit de la matrice $[f]_{\mathcal{DB}}$ avec la matrice (d'une seule colonne) $[x]_{\mathcal{B}}$. De plus, si $g : F \to G$ est une autre application linéaire et $\mathcal{H} = (h_1, \cdots, h_k)$ une base de G, alors

$$[g \circ f]_{\mathcal{HB}} = [g]_{\mathcal{HD}} [f]_{\mathcal{DB}}$$

D'ailleurs, dans ce cours on ne travaillera principalement avec des endomorphismes sur un même espace vectoriel E. On n'aura besoin que de choisir une seule base, disons $\mathcal{B}$, et on pourra simplifier la notation en écrivant $M_{\mathcal{B}}(f)$ où $[f]_{\mathcal{B}}$ pour la matrice associée à f dans cette base.

1.3 Changement de la base

Considerons un espace vectoriel E et l'application identité $\mathrm{id} : E \to E$, $\mathrm{id}(x) = x$. Soient $\mathcal{B} = (b_1, \cdots, b_n)$ et $\mathcal{D} = (d_1, \cdots, d_n)$ deux bases pour E. Appellons $\mathcal{B}$ l'ancienne base et $\mathcal{D}$ nouvelle base. Alors $[\mathrm{id}]_{\mathcal{DB}}$ est la matrice associé à id si on prend la base $\mathcal{B}$ pour l'espace de départ et $\mathcal{D}$ pour l'espace d'arrivé. En particulier, la $j$ième colonne de $[\mathrm{id}]_{\mathcal{DB}}$ est $[b_j]_{\mathcal{D}}$, le vecteur b_j exprimé dans la base $\mathcal{D}$.

D'une manière similaire $[\mathrm{id}]_{\mathcal{BD}}$ est la matrice qui a comme $j$ième colonne le vecteur d_j exprimé dans la base $\mathcal{B}$.

Définition 1.3.1. La *matrice de passage*[4] *de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{D}$* est la matrice

$$P_{\mathcal{BD}} := [\mathrm{id}]_{\mathcal{BD}}$$

Ses colonnes contiennent les vecteurs de la nouvelle base $\mathcal{D}$ exprimés dans l'ancienne base $\mathcal{B}$: **la j-ième colonne de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{D}$ est la colonne $[d_j]_{\mathcal{B}}$.**

1.3.1 Vecteur dans la nouvelle base

La matrice de passage permet de calculer les coordonnées d'un vecteur $x \in E$ dans la base $\mathcal{B}$ à l'aide de ses coordonnées dans la base $\mathcal{D}$ et vice versa.

Lemme 2. *On a*

$$[x]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{BD}}[x]_{\mathcal{D}}$$

et donc aussi

$$[x]_{\mathcal{D}} = P_{\mathcal{BD}}^{-1}[x]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{DB}}[x]_{\mathcal{B}}.$$

Démonstration. Exprimons l'équation $x = \mathrm{id}(x)$ en prenant la base $\mathcal{B}$ pour l'espace de départ de $\mathrm{id} : E \to E$ et $\mathcal{D}$ pour l'espace d'arrivé :

$$[x]_{\mathcal{B}} = [\mathrm{id}(x)]_{\mathcal{B}} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{BD}}[x]_{\mathcal{D}}$$

D'où la première équation.

Comme $\mathrm{id} = \mathrm{id} \circ \mathrm{id}$, on a

$$1_n = [\mathrm{id}]_{\mathcal{BB}} = [\mathrm{id} \circ \mathrm{id}]_{\mathcal{BB}} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{BD}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{DB}}$$

donc

$$[\mathrm{id}]_{\mathcal{BD}} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{DB}}{}^{-1}.$$

D'où la deuxième équation. □

Example : Soit $E = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = (1)$ et $\mathcal{D} = (10)$. Soit $x = 2$. Alors $[x]_{\mathcal{B}} = 2$ et $[x]_{\mathcal{D}} = \frac{1}{5}$. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{D}$ est $P_{\mathcal{BD}} = (10)$, et $P_{\mathcal{DB}} = (\frac{1}{10})$.

---

4. En anglais, on dit "change of base matrix" or "transition matrix". Attention, dans certains livres on appelle $P_{\mathcal{DB}}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{D}$, au lieu de $P_{\mathcal{BD}}$! Notre convention est la même que celle que vous trouvez sur Wikipedia (version francaise). Elle se justifie par le fait que les coefficients (p_{ij}) de $P_{\mathcal{BD}}$ satisfont $d_i = \sum_j p_{ij} b_j$.

1.3.2 Application linéaire dans la nouvelle base

Soit $f : E \to F$ une application linéaire, $\mathcal{B}$ une base pour E et $\mathcal{D}$ une base pour F. On suppose connaître les coefficients $[f]_{\mathcal{D}\mathcal{B}}$ dans la base $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$. Soit $\mathcal{B}'$ une autre base de E et $\mathcal{D}'$ une base pour F. On veut calculer $[f]_{\mathcal{D}'\mathcal{B}'}$. Nous avons l'équation

$$[f]_{\mathcal{D}'\mathcal{B}'} = [\mathrm{id} \circ f \circ \mathrm{id}]_{\mathcal{D}'\mathcal{B}'} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{D}'\mathcal{D}}[f]_{\mathcal{D}\mathcal{B}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = P^{-1}_{\mathcal{D}\mathcal{D}'}[f]_{\mathcal{D}\mathcal{B}}P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

donc on peut obtenir la matrice dans les nouvelles bases en multipliant la matrice dans les anciennes bases avec une matrice de passage et une matrice de passage inversée. Dans le cas d'un endomorphism $f : E \to E$ le changement de base se lit

$$[f]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[f]_{\mathcal{B}}P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

la nouvelle matrice est donc obtenue à partir de l'ancienne par conjugaison avec la matrice de passage.

Chapitre 2

Déterminant

2.1 Permutations

Soit X et Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une fonction. f est bijective si f est injective et surjective. Une fonction bijective est inversible : son inverse (ou réciproque) f^{-1} est

$$f^{-1}(y) = x, \quad \text{avec } x \in X \text{ t.q. } f(x) = y.$$

Si $Y = X$ alors on peut composer deux fonctions $f_1, f_2 : X \to X$, $f_1 \circ f_2$. Cet opération est associative. De plus, si $f : X \to X$ est bijective, alors $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$. De plus, $(f_1 \circ f_2)^{-1} = f_2^{-1} \circ f_1^{-1}$ pour deux fonctions bijectives.

L'ensemble de bijections de X forment un groupe avec élément neutre id, la multiplication étant la composition des bijections. Nous intéressons ici au cas que X est un ensemble fini. Autrement dit, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection entre X et l'ensemble $\{1, 2, \cdots, n\}$. Cette bijection donne une énumeration des éléments de X.

Définition 2.1.1. Une fonction bijective de X dans X est appellée une permutation de X. On note S_n le groupe des permutations de $\{1, 2, \cdots, n\}$.

Une notation effective pour les permutations de $\{1, 2, \cdots, n\}$ est la suivante

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Dans cette écriture la permutation id a deux lignes égaux. Pour trouver l'inverse de σ il suffit d'échanger les deux lignes et de ré-ordonner les colonnes pour obénir l'ordre croissante dans la première ligne.

Proposition 2. *S_n contient $n!$ éléments.*

Démonstration. On pourrait faire une récurrence mais il suffit de compter. En effet, il y a n choix pour $\sigma(n)$. Une fois ce choix effectué, il reste $n-1$ choix pour $\sigma(n-1)$. Une fois $\sigma(n)$ et $\sigma(n-1)$ fixés, il reste $n-2$ choix pour $\sigma(n-2)$. Lorsqu'on arrive à $\sigma(2)$, il n'y a plus que deux choix possibles et pour $\sigma(1)$ il n'y a plus qu'une seule possibilité. Ainsi le nombre total de possiblités est bien $n!$. □

Définition 2.1.2. Une transposition est une permutation qui échange deux éléments et laisse les autres éléments fixe.

Dans l'écriture d'en haut, une transposition n'a donc que deux colonnes, disons la i et la j-ième, qui n'ont pas les mêmes chiffres. On note cette transposition aussi (ij). Alors le produit

de la transposition (ij) avec la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ k_1 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$ est obtenue ainsi :
$(ij) \circ \sigma$ est obtenu en échangeant dans la deuxième ligne de σ les chiffres i et j,
$\sigma \circ (ij)$ est obtenu en échangeant dans la première ligne de σ les chiffres i et j et puis en ré-ordonnant les colonnes pour obtenir l'ordre croissant dans la première ligne.

Théorème 2. *Toute permutation est une composition (un produit) de transpositions.*

Démonstration. Soit $\sigma = \sigma_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ k_1 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$. Soit τ_n la permutation qui échange n avec k_n et laisse tous les autres éléments fixe (si $k_n = n$ alors $\tau_n = \mathrm{id}$, sinon τ_n est une transposition). Alors, il existe une permutation de $\{1, \cdots, n-1\}$, $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n-1 \\ k'_1 & \cdots & k'_{n-1} \end{pmatrix}$, tel que

$$\tau_n \circ \sigma_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n-1 & n \\ k'_1 & \cdots & k'_{n-1} & n \end{pmatrix}$$

On itère cette procedure : soit τ_{n-1} la permutation qui échange $n-1$ avec k'_{n-1}. Alors il existe une permutation de $\{1, \cdots, n-2\}$, $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n-2 \\ k'_2 & \cdots & k'_{n-1} \end{pmatrix}$, tel que

$$\tau_{n-1} \circ \tau_n \circ \sigma_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ k''_1 & \cdots & k''_{n-2} & n-1 & n \end{pmatrix}$$

etc.. Ainsi on trouve n permutations τ_i t.q.

$$\tau_1 \circ \cdots \tau_n \circ \sigma_n = \mathrm{id}.$$

Plus précisement, τ_i est une transposition ou $\tau_i = \mathrm{id}$. Il en suit que

$$\sigma = \tau_n^{-1} \circ \cdots \circ \tau_1^{-1} = \tau_n \circ \cdots \circ \tau_1.$$

Les $\tau_i = \mathrm{id}$ s'annullent dans cette expression, pendant que les autres τ_i sont des transpositions. Donc σ est une composition des transpositions. □

Exemple 2.1.3. *Soit* $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \in S_6$. *Alors*

$$(36) \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(1\ 4) \circ (3\ 6) \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(1\ 2) \circ (1\ 4) \circ (3\ 6) \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

D'où

$$\sigma = (3\ 6) \circ (4\ 1) \circ (1\ 2)$$

Mais aussi

$$\sigma = (1\ 2) \circ (1\ 4) \circ (3\ 6)$$

De plus

$$(1\ 2) \circ (2\ 3) \circ (1\ 2) = (1\ 3).$$

Remarque 2.1.4. *Comme le montre ces exemples, la décomposition en produit de transpositions n'est pas unique (ni sur les transpositions ni sur leur nombre).*

2.1.1 Signe d'une permutation

Théorème 3. *Il existe une fonction unique $\varepsilon : S_n \to \{+1, -1\}$, appellée la fonction signature, qui satisfait*

1. *$\varepsilon(\sigma) = -1$ pour toute transposition σ,*
2. *$\varepsilon(\sigma \circ \tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$ pour tout $\sigma, \tau \in S_n$.*

Démonstration. 1. On pose

$$\varepsilon(\sigma) := \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

Comme

$$\prod_{1 \le i < j \le n} |\sigma(j) - \sigma(i)| = \prod_{1 \le i < j \le n} |j - i|$$

on a $\varepsilon(\sigma) \in \{-1, 1\}$.

Soit $\sigma = (kl)$, $k < l$. Alors $\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i} = 1$ si i, j, k, l sont deux à deux distinct. Dans le produit il suffit donc de considérer les facteurs $\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$ où un des i, j coincide avec un des k, l, mais pas l'autre, ainsi que le facteur où $i = k$ et $j = l$. Le dernier donne $\frac{\sigma(l)-\sigma(k)}{l-k} = -1$. Donc

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\sigma) &= -\left(\prod_{\substack{1 \le i < j \le n \\ i=k, j \ne l}} \frac{\sigma(j) - \sigma(k)}{j - k}\right)\left(\prod_{\substack{1 \le i < j \le n \\ j=k, i \ne l}} \frac{\sigma(k) - \sigma(i)}{k - i}\right)\left(\prod_{\substack{1 \le i < j \le n \\ i=l, j \ne k}} \frac{\sigma(j) - \sigma(l)}{j - l}\right)\left(\prod_{\substack{1 \le i < j \le n \\ j=l, i \ne k}} \frac{\sigma(l) - \sigma(i)}{l - i}\right) \\
&= -\left(\prod_{\substack{1 \le i < j \le n \\ i=k<j \ne l}} \frac{j - l}{j - k}\right)\left(\prod_{\substack{1 \le i < j \le n \\ i<j=k<l}} \frac{l - i}{k - i}\right)\left(\prod_{\substack{1 \le i < j \le n \\ k<i=l<j}} \frac{j - k}{j - l}\right)\left(\prod_{\substack{1 \le i < j \le n \\ j=l>i \ne k}} \frac{k - i}{l - i}\right)
\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon(\sigma)$ est un signe il suffit maintenant de compter les facteurs negatifs. Les facteurs du deuxième et troisième produit sont tous positifs. Dans le premier produit, le facteur est negatif si $k < j < l$ et dans le quatrième si $k < i < l$. Le nombre de facteurs negatifs est donc pair. Donc $\varepsilon(\sigma) = -1$.

2. Soit σ et τ deux permutations. On observe que $(\sigma(j) - \sigma(i))(j - i) = (\sigma(i) - \sigma(j))(i - j)$ et donc,

$$\prod_{1 \le i < j \le n} (\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i)))(\tau(j) - \tau(i)) = \prod_{1 \le i < j \le n} (\sigma(j) - \sigma(i))(j - i)$$

. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{\tau(j) - \tau(i)} &= \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{(\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i)))(\tau(j) - \tau(i))}{(\tau(j) - \tau(i))(\tau(j) - \tau(i))} \\
&= \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{(\sigma(j) - \sigma(i))(j - i)}{(j - i)(j - i)} \\
&= \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}
\end{aligned}$$

Finalement,

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(\sigma\circ\tau) &= \prod_{1\le i<j\le n} \frac{\sigma(\tau(j))-\sigma(\tau(i))}{j-i} \\
&= \prod_{1\le i<j\le n} \frac{\sigma(\tau(j))-\sigma(\tau(i))}{\tau(j)-\tau(i)} \, \frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i} \\
&= \left(\prod_{1\le i<j\le n} \frac{\sigma(\tau(j))-\sigma(\tau(i))}{\tau(j)-\tau(i)}\right)\left(\prod_{1\le i<j\le n} \frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i}\right) \\
&= \varepsilon(\sigma)\,\varepsilon(\tau).
\end{aligned}
$$

□

Corollaire 2. *Soit σ une permutation. Le nombre des transpositions dans une factorisation de σ en un produit de transpositions est soit pair (dans ce cas la permutation a signe $+1$) soit impair (dans ce cas la permutation a signe -1).*

A partir de cette information on trouve rapidement $\varepsilon(\mathrm{id}) = 1$ et, pour toute permutation σ, $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$.

2.2 Déterminant d'une matrice

Définition 2.2.1. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On note $A = (a_{ij})$ avec $1 \le i, j \le n$. On définit le déterminant de A :

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$$

Ainsi $\det(A) \in \mathbb{K}$.

Autres notations.

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}. \end{vmatrix}$$

Exemple 2.2.2. *1. ($n = 2$) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors $\det(A) = ad - bc$. En effet, les deux permutations de S_2 sont $\sigma = \mathrm{id}$ et $\sigma' = (12)$. On obtient alors*

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} + \varepsilon(\sigma') a_{\sigma'(1),1} a_{\sigma'(2),2} \\
&= ad - cb
\end{aligned}
$$

2. ($n = 3$)

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

On obtient alors

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

Proposition 3. *Soit $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice block-triagonale, c.à.d. il existe $k \leq n$ tel que $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ ou $A = (a_{ij}) \in M_k(\mathbb{K})$ et $D = (d_{ij}) \in M_{n-k}(\mathbb{K})$ sont des matrice carrées et B est une matrice k fois $n-k$. Alors*

$$\det(M) = \det(A)\det(D).$$

Démonstration. Une autre manière de caractériser une telle matrice block-triagonale $M = (m_{ij})$ est de dire que $m_{ij} = 0$ si $i > k$ et $j \leq k$. Supposons que c'est le cas. Alors le produit $\prod_{i=1}^n m_{\sigma(i)\,i}$, qui fait partie de la formule pour le déterminant, s'annulle, si $\sigma(j) > k$ pour un $j \leq k$. Donc, une condition necessaire pourque le produit est non-nul est, que σ envoie la partie $\{k+1, \cdots, n\}$ en lui-meme. Comme σ est une bijection ceci entraine que σ envoie aussi la partie $\{1, \cdots, k\}$ en lui-meme. Donc σ doit être la composition d'une permutation σ_1 de $\{1, \cdots, k\}$ avec une permutation σ_2 de $\{k+1, \cdots, n\}$. Il en suit que

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n m_{\sigma(i)\,i} &= \sum_{\sigma_1 \in S_k} \sum_{\sigma_2 \in S_{n-k}} \varepsilon(\sigma_1\sigma_2) \prod_{i=1}^k m_{\sigma_1(i)\,i} \prod_{i=k+1}^n m_{\sigma_2(i)\,i} \\ &= \left(\sum_{\sigma_1 \in S_k} \varepsilon(\sigma_1) \prod_{i=1}^k a_{\sigma_1(i)\,i} \right) \left(\sum_{\sigma_2 \in S_{n-k}} \varepsilon(\sigma_2) \prod_{i=k+1}^n d_{\sigma_2(i)-k\,i-k} \right) \\ &= \det(A)\det(D). \end{aligned}$$

□

Corollaire 3. *Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice triagonale. Alors*

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{i\,i}$$

Proposition 4. *Le déterminant est une application multilinéaire alternée en les colonnes, c'est-à-dire : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et soient $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de A.*

1. *Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. On suppose qu'il existe des colonnes C, C' et des scalaires $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$ tels que $C_i = \lambda C + \lambda' C'$. Alors*

$$\det(A) = \lambda \det(C_1 \ \cdots \ \underbrace{C}_{\textit{position } i} \ \cdots \ C_n) + \lambda' \det(C_1 \ \cdots \ \underbrace{C'}_{\textit{position } i} \ \cdots \ C_n).$$

2. *Soient $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ avec $i \neq j$. Soit B la matrice obtenue en échangeant les colonnes C_i et C_j dans A (i.e. la colonne i de B est C_j et la colonne j de B est C_i, les autres colonnes étant les mêmes que dans A).*
   Alors $\det(B) = -\det(A)$.

Démonstration. 1. Notons $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ et $C' = \begin{pmatrix} c'_1 \\ \vdots \\ c'_n \end{pmatrix}$. Notons aussi B la matrice obtenue en remplaçant, dans A, la colonne C_i par C. De même, B' la matrice obtenue en remplaçant C_i par C'. L'hypothèse nous dit que pour tout $k = 1, \ldots, n$, $a_{ki} = \lambda c_k + \lambda' c'_k$. Par conséquent

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(i),i}\cdots a_{\sigma(n),n}\\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}\cdots (\lambda c_{\sigma(i)}+\lambda' c'_{\sigma(i)})\cdots a_{\sigma(n),n}\\
&= \lambda \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}\cdots c_{\sigma(i)}\cdots a_{\sigma(n),n} + \lambda' \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}\cdots c'_{\sigma(i)}\cdots a_{\sigma(n),n}\\
&= \lambda \det(B) + \lambda' \det(B').
\end{aligned}$$

2. Considérons la transposition $\tau = (i\ j) \in S_n$. La matrice B est alors $(C_{\tau(1)} \ \cdots \ C_{\tau(n)})$. On a :

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \sum_{\sigma\in s_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),\tau(i)}\\
&= \sum_{\sigma\in s_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(\tau^{-1}(\tau(i))),\tau(i)}\\
&= \sum_{\sigma\in s_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(\tau^{-1}(i)),i}\\
&= \varepsilon(\tau) \sum_{\sigma\in s_n} \varepsilon(\sigma\circ\tau^{-1}) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(\tau^{-1}(i)),i}\\
&= \varepsilon(\tau)\det(C_1 \ \cdots \ C_n)\\
&= -\det(A).
\end{aligned}$$

□

La même démonstration que précédemment permet de prouver la propositon suivante.

Proposition 5. *Soient $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes d'une certaine matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$. Soit $\tau \in S_n$, alors*

$$\det(C_{\tau(1)} \ \cdots \ C_{\tau(n)}) = \varepsilon(\tau)\det(C_1 \ \cdots \ C_n).$$

Remarque 2.2.3. *L'application* det *n'est pas linéaire. En fait,*

1. *pour $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.*
2. *pour $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, en général on a $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$.*

Démonstration. 1. Si on note C_i les colonnes de A alors $\det(\lambda A) = \det(\lambda C_1\ \lambda C_2 \ \cdots \ \lambda C_n) = \lambda \det(C_1\ \lambda C2 \ \cdots \ \lambda C_n) = \lambda^2 \det(C_1\ C_2 \ \cdots \ \lambda C_n) = \cdots$.

2. Voici un contre-exemple : $\det(I_n + I_n) = \det(2I_n) = 2^n \det(I_n) = 2^n$ alors que $\det(I_n) + \det(I_n) = 2$. Les deux termes sont différents si $n \geq 2$.

□

Proposition 6. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice ayant deux colonnes égales. Alors $\det(A) = 0$.*

Démonstration. Par hypothèse, il existe $i \neq j$ tel que les colonnes C_i et C_j soient égales. La matrice obtenue en échangeant ces colonnes est encore égale à A. Par la prop. 4, on obtient alors $\det(A) = -\det(A)$ ce qui donne $\det(A) = 0$. □

Proposition 7. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors $\det({}^tA) = \det(A)$.*

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\det({}^tA) &= \sum_\sigma \varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} \\
&= \sum_\sigma \varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n a_{\sigma^{-1}(\sigma(i)),\sigma(i)} \\
&= \sum_\sigma \varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^n a_{\sigma^{-1}(j),j} \\
&= \sum_\sigma \varepsilon(\sigma^{-1})\prod_{i=1}^n a_{\sigma^{-1}(j),j} \\
&= \det(A)
\end{aligned}$$

□

Corollaire 4. *Le déterminant est multilinéaire en les lignes. De plus si τ est une permutation des lignes de A alors le déterminant de la matrice obtenue en permutant les lignes à l'aide de τ est égal à $\varepsilon(\tau)\det(A)$.*

Démonstration. Ces propriétés sont vraies pour les colonnes et la prop. précédente permet de les avoir pour les lignes. □

Théorème 4. *Pour $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.*

Démonstration. Notons $A = (a_{ij}) = (A_1 \ \cdots \ A_n)$, $B = (b_{ij})$, $C = AB = (c_{ij}) = (C_1 \ \cdots \ C_n)$ de sorte que $c_{ik} = \sum_{j=1}^n = a_{ij}b_{jk}$. On a alors

$$C_k = \begin{pmatrix} c_{1k} \\ \vdots \\ c_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}b_{jk} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}b_{jk} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n b_{jk}\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n b_{jk}A_j.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= \det(C_1 \ C_2 \cdots \ C_n) \\
&= \det(\sum_{i_1=1}^n b_{i_1,1}A_{i_1} \quad \sum_{i_2=1}^n b_{i_2,2}A_{i_2} \quad \cdots \quad \sum_{i_n=1}^n b_{i_n,n}A_{i_n}) \\
&\overset{Prop.\ 4}{=} \sum_{1\leq i_1,\ldots,i_n\leq n} b_{i_1,1}\ b_{i_2,2}\cdots b_{i_n,n}\ \det(A_{i_1}\ A_{i_2}\ \cdots\ A_{i_n}).
\end{aligned}$$

Dans cette somme, dès que deux i_j sont égaux, on obtient deux colonnes égales et le terme disparaît. Il ne reste que les termes où $i_1, \ldots, i_n$ sont distincts deux à deux. Autrement dit les termes pour lesquelles $(i_1, \ldots, i_n)$ est une permutation de $\{1, \ldots, n\}$. On note alors $i_1 = \sigma(1) \ldots, i_n = \sigma(n)$ et on peut réécrire

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= \sum_{\sigma\in S_n} b_{\sigma(1),1}\ b_{\sigma(2),2}\cdots\ b_{\sigma(n),n}\ \det(A_{\sigma(1)}\ \cdots\ A_{\sigma(n)}) \\
&\overset{Prop.\ 5}{=} \sum_{\sigma\in S_n} b_{\sigma(1),1}\ b_{\sigma(2),2}\cdots\ b_{\sigma(n),n}\ \varepsilon(\sigma)\det(A_1\ \cdots\ A_n) \\
&= \det(B)\det(A).
\end{aligned}$$

□

Théorème 5. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, alors*

$$\det(A) \neq 0 \iff A \text{ est inversible.}$$

Démonstration. "$\Leftarrow$" : Soit B l'inverse de A alors $AB = \mathrm{I_n}$ et $1 = \det(\mathrm{I_n}) = \det(\mathrm{AB}) = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{B})$ d'où $\det(A) \neq 0$.

"$\Rightarrow$" : Par contraposée, on suppose A non inversible donc les colonnes C_i de A sont liées. Quitte à faire un échange de colonnes, on peut supposer que $C_1 = \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_n C_n$ avec $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Par conséquent $\det(A) = \det(\sum_2^n \lambda_i C_i \;\; C_2 \;\cdots\; C_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \det(C_i \; C_2 \;\cdots\; C_n) = 0$. □

Corollaire 5. *Si A est une matrice inversible,* $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Démonstration. Si A est inversible, alors $AA^{-1} = \mathrm{I_n}$. Donc

$$1 = \det(\mathrm{I_n}) = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{A^{-1}}).$$

□

2.2.1 Déterminant d'un endomorphisme

Dans ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n et $u : E \to E$ un endomorphisme de E.

Lemme 3. *Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $A = M_{\mathcal{B}}(u)$ et $A' = M_{\mathcal{B}'}(u)$. Alors* $\det(A) = \det(A')$.

Démonstration. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Alors $A' = P^{-1}AP$ et on a $\det(A') = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = (\det(P))^{-1}\det(P)\det(A) = \det(A)$. □

Définition 2.2.4. On définit le déterminant de u comme étant le déterminant de la matrice de u dans n'importe quelle base de E.

Le lemme précédent nous assure que cette définition ne dépend pas du choix de la base.

Nous donnons les deux propositions suivantes sans démonstrations car ces dernières sont faciles ou triviales.

Proposition 8. *On a les équivalences suivantes : u est bijectif $\iff$ u est injectif $\iff$ u est surjectif $\iff$* $\det(u) \neq 0$.

Proposition 9. *Soient u et v deux endomorphismes de E. On a*

1. $\det(u \circ v) = \det(u)\det(v)$,
2. $\det(\mathrm{Id}_E) = 1$,
3. *Si u est inversible alors* $\det(u^{-1}) = (\det(u))^{-1}$.

2.3 Calcul pratique du déterminant

On utilise très rarement la formule dans la définition du déterminant pour le calculer. Voici quelques stratégies pour le calcul pratique d'un déterminant.

2.3.1 Par transformations élémentaires de la matrice

Une manière efficace passe par l'application des transformations élémentaires à la matrice pour la rendre triagonale. Bienque le déterminant n'est pas invariant sous transformation élémentaire, il ne peut changer que d'un signe, et ce signe peut être déterminé.

Proposition 10. *1. Le déterminant est opposé si on échange deux lignes ou deux colonnes.*

2. Si on remplace une colonne C (resp. une ligne L) par $C+$"une combinaison linéaire des autres" (resp. $L+\cdots$) alors le déterminant ne change pas.

Démonstration. 1. Déjà vu pour les colonnes et l'égalité $\det(A) = \det({}^tA)$ l'implique pour les lignes.

2. Faisons la preuve pour $C = C_1$. Remplacons alors C_1 par $C_1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i C_i$,

$$\begin{aligned}\det(C_1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i C_i \;\; C_2 \;\cdots\; C_n) &= \det(C_1\; C_2 \;\cdots\; C_n) + \sum_{i=2}^n \lambda_i \det(C_i\; C_2 \;\cdots\; C_n)\\ &= \det(C_1\; C_2\; \cdots\; C_n).\end{aligned}$$

□

2.3.2 Developpement du déterminant lelong d'une colonne ou ligne

Une autre méthode de calcul est le developpement du déterminant lelong une colonne ou ligne. Elle répose sur le

Lemme 4.

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{k-1} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-1,2} & \cdots & a_{k-1,n} \\ a_{k+1,2} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Démonstration. Si $k = 1$ alors le résultat découle de la Prop. 3. Si $k > 1$ on echange la k-ième avec la $k-1$-ième ligne ; en conséquence le déterminant prend un signe $-$. On itère jusqu'en arrivant à une matrice où les 0 de la première colonne sont tous en bas. Ca fait $k-1$ opérations d'échange. D'où le resultat. □

Corollaire 6.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} a_{k1} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-1,2} & \cdots & a_{k-1,n} \\ a_{k+1,2} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Démonstration. Comme le déterminant est linéaire dans les colonnes on a

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{k1} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

et le résultat découle du dernier lemme. □

Grâce à la transposition, on a un résultat similaire avec les lignes. De plus, en tenant compte d'un signe (notament $(-1)^{j-1}$) on a un resultat similaire en developpant lelong la j-ième colonne. Relié à cela est la notion du cofacteur d'une matrice :

Soit $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ et $k, l \leq n$. Si on enlève la $k$ième ligne et la $l$ième colonne on obtient une matrice noté $\tilde{M}_{kl}$ de taille $n-1 \times n-1$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & l & \end{array} \\ M = & \begin{pmatrix} A & \vdots & B \\ \cdots & \cdot & \cdots \\ C & \vdots & D \end{pmatrix} k, \quad \tilde{M}_{kl} := \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \end{array}$$

ou
$A = (a_{ij}) \in M_{k-1\,l-1}(\mathbb{K})$ avec $a_{ij} = m_{ij}$, $i < k$, $j < l$,
$B = (b_{ij}) \in M_{k-1\,n-l}(\mathbb{K})$ avec $b_{ij} = m_{ij}$, $i < k$, $j > l$
$C = (c_{ij}) \in M_{n-k\,l-1}(\mathbb{K})$ avec $c_{ij} = m_{ij}$, $i > k$, $j < l$
$D = (d_{ij}) \in M_{n-k\,n-l}(\mathbb{K})$ avec $c_{ij} = m_{ij}$, $i > k$, $j > l$

Définition 2.3.1. Le nombre

$$M_{kl} := (-1)^{k+l} \det(\tilde{M}_{kl})$$

est appelé le cofacteur d'indice (k, l) de M.[1]

Théorème 6. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Pour tout $k = 1, \ldots, n$,*

$$\det(A) = a_{k1}A_{k1} + \cdots + a_{kn}A_{kn}. \tag{2.1}$$

Pour tout $j = 1, \ldots, n$,

$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}. \tag{2.2}$$

Démonstration. La première expression est le developpement du déterminant lelong la $k$ième ligne. La deuxième expression est le developpement du déterminant lelong la $j$ième colonne.

D'abord on observe que la deuxième formule correspond, si $j = 1$, au cas du Cor. 6. Pour j quelconque on obtient la deuxième formule par application des échanges de colonnes : d'abord j avec $j-1$, puis $j-1$ avec $j-2$, etc.. Après $j-1$ échanges on obtient de nouveau le cas du Cor. 6. Chaque échange amène à un signe -1. De plus, la $j$ième colonne est devenu la première et les autres colonnes ont gardées leur ordre. D'où la formule (2.2) (le signe est déjà pris en charge par le signe dans la définition du cofacteur).

La formule (2.1) peut être obtenu par transposition de (2.2). □

1. Le nombre $\det(\tilde{M}_{kl})$ est aussi appelé mineur de d'ordre $n-1$ d'indice (k, l). On ne parlera pas de mineurs d'ordre $< n-1$ dans ce cours.

2.4 Une formule pour l'inverse d'une matrice

On peut exprimer l'inverse A^{-1}, sous l'hypothèse que $\det(A) \neq 0$, à l'aide des cofacteurs. Bienque cette formule devient lourde si la dimension augmente, elle est utile théoriquement.

Définition 2.4.1. La comatrice de la matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est la matrice $\mathrm{co}(A) \in M_n(\mathbb{K})$, qui a comme coefficient ij le cofacteur de A d'indice (i,j),

$$\mathrm{co}(A) := (A_{ij}).$$

Le transpośe de la comatrice est alors ${}^t\mathrm{co}(A) = (A_{ji})$.

Théorème 7. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors*

$$A\,{}^t\mathrm{co}(A) = {}^t\mathrm{co}(A)A = \det(A)I_n.$$

Corollaire 7. *Si A est inversible alors $A^{-1} = \det(A)^{-1}\ {}^t\mathrm{co}(A)$.*

Démonstration du théorème. Comme d'habitude on note a_{ij} les coefficients de A et A_{ij} les cofacteurs associés à A. Pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, on considère

$$\Gamma_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn}.$$

- Si $i = j$ alors $\Gamma_{ij} = \det(A)$: en effet, c'est le développement du déterminant par rapport à la ligne i.
- Si $i \neq j$ alors $\Gamma_{ij} = 0$. En effet, soit B la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la ligne j par la ligne i (les lignes autres que la ligne j étant celles de A). Alors d'une part $\det(B) = 0$ et d'autre part si on développe $\det(B)$ par rapport à la ligne j, on obtient Γ_{ij}.

Par conséquent : $\Gamma_{ij} = \delta_{ij}\det(A)$.
Le membre de gauche est le coefficient (i,j) de $A\ {}^t\mathrm{co}(A)$ et le membre de droite est le coefficient (i,j) de $\det(A)\ I_n$. On a donc démontré que $A\ {}^t\mathrm{co}(A) = \det(A)\ I_n$.
Pour obtenir l'égalité ${}^t\mathrm{co}(A)\ A = \det(A)\ I_n$ on fait la même chose en utilisant $\Gamma'_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{kj}A_{ik}$. □

2.4.1 Formules de Cramer

Théorème 8. *Soient $a_{ij} \in \mathbb{K}$ avec $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Soient $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$. On considère le système suivant*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Notons $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$. Si $\det(A) \neq 0$ alors l'unique solution du système est donnée par

$$x_i = \frac{\det(C_1 \cdots C_{i-1}\ B\ C_{i+1} \cdots C_n)}{\det(A)}$$

où C_i désigne la colonne i de A.

Démonstration. Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ l'unique solution du système $AX = B$. On a donc $B = x_1 C_1 + \cdots + x_n C_n$ d'où

$$\begin{aligned} \det(C_1 \cdots C_{i-1}\ B\ C_{i+1} \cdots C_n) &= \sum_{j=1}^{n} x_j \det(C_1 \cdots C_{i-1}\ C_j\ C_{i+1} \cdots C_n) \\ &= x_i \det(C_1 \cdots C_{i-1}\ C_i\ C_{i+1} \cdots C_n) \\ &= x_i \det(A). \end{aligned}$$

□

Chapitre 3

Equation propre et spectre d'un endomorphisme

Plusieurs questions trouvent des réponses à travers la notion des valeurs propres (spectre) d'un endomorphisme. Par exemple :

1. Quelles propriétés d'une matrice carrée restent inchangées si on conjuge la matrice par une matrice inversible ?
2. Quelles propriétés d'un endomorphisme peuvent se déduire de l'expression de la matrice associée à l'endomorphisme dans une base ?
3. Quelle est la description la plus simple d'un endomorphisme ?

De plus, dans des applications diverses, le spectre d'un endomorphisme a très souvent une interprétation importante (instrument de musique).

3.1 Valeur, vecteur, espace propre

Définition 3.1.1. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E. L'équation

$$u(x) = \lambda x,$$

où $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, est appellée l'équation propre pour u.

Définition 3.1.2. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E. On appelle $\lambda \in \mathbb{K}$ *valeur propre* pour u si l'équation propre $u(x) = \lambda x$ admet une la solution $x \neq 0_E$.

Une telle solution x est appellée *vecteur propre* de u (pour la valeur propre λ).

On note que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, l'équation propre a toujours la solution $x = 0_E$. Celle-ci n'est donc pas interéssante. C'est pour cela on n'appelle 0_E pas vecteur propre.

Si $x \neq 0_E$ est vecteur propre pour u alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ t.q. $(u - \lambda \mathrm{id})(x) = 0$. On appelle

$$E_\lambda := \ker(u - \lambda \mathrm{id})$$

l'espace propre pour λ (de u). E_λ contient toujours 0_E, mais est un sous-espace non-trivial seulement de E si λ est une valeur propre pour u. On appelle l'ensemble des valuers propres le *spectre* de u. On va voir plus bas que, si E est de dimension fini, on peut déterminer les valeurs propres en passant par le polynôme caractéristique.

Proposition 11. *Les espaces propres d'un endomorphisme sont en somme directe, c.à.d.*

$$E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \cdots + E_{\lambda_k} = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_k}$$

où $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ sont les valeurs propres (distinctes) de u.

Démonstration. Par récurrence sur k. Pour $k = 1$ il n'y a rien à prouver.

Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ des valeurs propres distinctes de u. Soit $x_i \in E_{\lambda_i}$ et

$$x_1 + \cdots + x_k = 0_E.$$

On a alors

$$0_E = (u - \lambda_k \mathrm{id})(0_E) = \sum_{i=1}^{k} (u - \lambda_k \mathrm{id})(x_i) = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda_k) x_i = \sum_{i=1}^{k-1} (\lambda_i - \lambda_k) x_i$$

Par hypothèse de récurrence on a $y_1 + \cdots + y_{k-1} = 0$, $y_i \in E_{\lambda_i}$, implique $y_i = 0$ pour $i = 1, \cdots, k-1$. D'ou $(\lambda_i - \lambda_k)x_i = 0$ pour tout $i \leq k-1$. Comme $\lambda_i \neq \lambda_k$ pour $i \leq k-1$ ceci implique $x_i = 0$ pour tout $i \leq k-1$. Donc aussi $x_k = 0$. La somme $E_{\lambda_1}, \cdots, E_{\lambda_k}$ est alors directe. □

3.2 Endomorphismes diagonalisables

Une matrice *diagonale* est une matrice carrée qui n'a que des coefficients non-nulles sur la diagonale, c.à.d.

$$a_{ij} = 0, \quad \text{si } i \neq j$$

On va utiliser la notation $\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ pour la matrice diagonale avec $a_{ii} = \lambda_i$.

Définition 3.2.1. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est diagonalisable (sur $\mathbb{K}$) s'il existe une matrice inversible $P \in M_n(\mathbb{K})$ t.q. $D = P^{-1}AP$ est une matrice diagonale. Autrement dit, A est conjugé à une matrice diagonale.

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$, de dimension fini. u est diagonalisable si E admet une base $\mathcal{B}$, t.q. $[u]_{\mathcal{B}}$ est une matrice diagonale.

Comme on peut interprêter une matrice $n \times n$ comme la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dans la base canonique, la première définition est un cas particulier de la deuxieme. En effet, P joue le role de la matrice de passage de la base canonique vers une base dans laquelle A est diagonale.

La notion de matrice diagonale dépend du corps $\mathbb{K}$. Il se peut qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ n'a que des coefficients *réels*. Si A est diagonalisable et il existe une matrice inversible *réelle* P t.q. $D = P^{-1}AP$ est diagonale, alors A est même diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$ et on spécifie que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

De l'autre côté, il se peut qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$, c.à.d. qu'il n'existe pas de matrice inversible *réelle* P t.q. $D = P^{-1}AP$ est diagonale, mais qu'il existe une matrice inversible *complexe* P t.q. $D = P^{-1}AP$ est diagonale. Dans ce cas, A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ et on dit qu'elle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Une matrice qui est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ est alors aussi diagonalisable sur $\mathbb{C}$, mais une matrice réelle qui est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ n'est pas forcement diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Théorème 9 (Première critère de diagonalisation)**.** *Soit u un endomorphisme sur E, de dimension n. u est diagonalisable si et seulement si E admet une base $\mathcal{B} = \{b_1, \cdots, b_n\}$ de vecteurs propres de u. Dans ce cas $[u]_{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ où λ_i est la valeur propre pour b_i.*

Démonstration. Soit $\mathcal{B} = \{b_1, \cdots, b_n\}$ une base de vecteurs propres de u. Il existe alors λ_i t.q. $u(b_i) = \lambda_i b_i$. Alors par calcul directe

$$[u]_{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n).$$

Soit maintenant u diagonalisable. Il existe donc une base $\mathcal{B} = \{b_1, \cdots, b_n\}$ t.q. $[u]_\mathcal{B}$ est une matrice diagonale, disons $[u]_\mathcal{B} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ avec des scalaires $\lambda_j \in \mathbb{K}$. On trouve

$$[u(b_j)]_\mathcal{B} = [u]_\mathcal{B}[b_j]_\mathcal{B} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)e_j = \lambda_j e_j = [\lambda_j b_j]_\mathcal{B}$$

Donc $[u(b_j) - \lambda_j b_j]_\mathcal{B} = 0_{\mathbb{K}^n}$. Donc $u(b_j) - \lambda_j b_j = 0_E$. Comme $b_j \neq 0_E$ c'est un vecteur propre pour la valeur propre λ_j. □

Tout vecteur propre appartient à un espace propre. Donc si E admet une base de vecteurs propres on a $E \subset E_{\lambda_1} + \cdots + E_{\lambda_k}$, ce qui entraine

$$E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_k} \tag{3.1}$$

par Prop. 11. De l'autre côté, si $\mathcal{B}_i$ est une base the E_{λ_i} (et une telle base exists toujours) alors (3.1) implique que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_n$ est une base pour E. Donc (3.1) est une condition necessaire et suffisant pour que E admet une base de vecteurs propres. On peut aussi formuler ca comme ca : Soit $g_\lambda = \dim E_\lambda$, dite la *multiplicité géométrique* de la valeur propre λ. Par définition d'une valeur propre, $g_\lambda \geq 1$. On a alors

Lemme 5. *Soit u un endomorphisme sur E, de dimension n. u est diagonalisable si et seulement si la somme des multiplicités géométriques vaut n.*

Démonstration. On a vu que u est diagonalisable si et seulement si (3.1) est satisfait. Comme l'inclusion $E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_k} \subset E$ est toujours vrai, la somme des dimensions des espaces propres doit être $\leq n$ et est égal à n si et seulement si l'inclusion est un égalité. □

Exemple 3.2.2.

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *est diagonalisable sur $\mathbb{Q}$.*
2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ *n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{Q}$, mais sur $\mathbb{R}$.*
3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$, mais sur $\mathbb{C}$.*
4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$.*

3.3 Polynôme caractéristique

Dans l'exemple en haut on était capable de calculer facilement les valeurs propres et les vecteurs propres car la dimension n'était pas très élevée. Le polynôme caractéristique est l'outil qui permet (en principe) de déterminer tous les valeurs propres en toute dimension.

Définition 3.3.1. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice $n \times n$. On appelle

$$P_A(\lambda) := \det(A - \lambda 1_n)$$

le polynôme caractéristique de A.

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. On appelle

$$P_u(\lambda) := \det(u - \lambda \mathrm{id})$$

le polynôme caractéristique de u.

Les deux définitions an haut sont bien sûr reliées, car le detérminant d'un endomorphisme est défini à l'aide d'une matrice pour l'endomorphisme. Ainsi $\det(u - \lambda \mathrm{id}) = \det([u - \lambda \mathrm{id}]_{\mathcal{B}}) = \det([u]_{\mathcal{B}} - \lambda 1_n)$ où $\mathcal{B}$ est n'importe quel base pour E et $n = \dim E$. Dans ce qui suit nous étudions le polynôme caractéristique des matrices, mais les énoncés peuvent facilement être reformulées en termes d'endomorphismes.

On note que $P_A(\lambda)$ est bien un polynôme en λ, son degré est n.

Lemme 6. *Soit A une matrice $n \times n$. Alors*

$$P_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \mathrm{Tr}(A)\ \lambda^{n-1} + \cdots + \det(A)$$

où $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ est la trace de A.

Démonstration. On rappelle que $\det(A - \lambda 1_n)$ est une somme de termes de la forme

$$Q_\sigma(\lambda) = \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (a_{\sigma(i)i} - \lambda \delta_{\sigma(i)i}). \tag{3.2}$$

Chacun des Q_σ est un polynôme en λ. Pourqu'une puissance λ^n apparaisse, il faut que tous les $\delta_{\sigma(i)i}$ soient non-nuls. Ceci est le cas seulement si $\sigma = \mathrm{id}$. Dans ce cas on obtient de (3.2)

$$Q_{\mathrm{id}}(\lambda) = \prod_{i=1}^n (a_{ii} - \lambda) = (-\lambda)^n + \sum_{i=1}^n a_{ii} (-\lambda)^{n-1} + \cdots$$

où les $\cdots$ sont des termes en λ^m avec $m < n-1$. Si $\sigma \neq \mathrm{id}$ alors au moins deux des $\delta_{\sigma(i)i}$ sont nuls. Dans ce cas Q_σ est un polynôme de λ de degré $\leq n-2$.

Finalement le terme constant est $P_A(0) = \det(A)$. □

Théorème 10. *λ est une valeur propre de u si et seulement si $P_u(\lambda) = 0$.*

Démonstration. On a la chaine d'équivalences suivante :

λ est valeur propre de u $\Leftrightarrow$ $\ker(u - \lambda \mathrm{id}) \neq \{0_E\}$ $\Leftrightarrow$ $u - \lambda \mathrm{id}$ n'est pas injective $\Leftrightarrow$ $u - \lambda \mathrm{id}$ n'est pas inversible $\Leftrightarrow$ $\det(u - \lambda \mathrm{id}) = 0$. □

Corollaire 8. *Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ possède au plus n valeurs propres.*

Démonstration. $P_A(\lambda)$ est un polynôme de degré n. Un polynôme de degré n admet au plus n racines. □

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme et λ une racine de P. On dit que λ a multiplicité m si $P(X)$ est divisible par $(X - \lambda)^m$ mais pas divisible par $(X - \lambda)^{m+1}$.

Définition 3.3.2. Soit λ une valeur propre de A. On dit que la *multiplicité algébrique* de λ est m si, en tant que racine du polynôme caractéristique P_A, λ a multiplicité m. On note la multiplicité algébrique de λ par m_λ.

Une valeur propre simple est donc une valeur propre de multiplicité algébrique 1.

Définition 3.3.3. Un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ est scindé si il se factorise en facteurs linéaires, c.à.d. il existe $\lambda_i \in \mathbb{K}$ (pas forcement distinct) et $c \in \mathbb{K}$ t.q.

$$P[X] = c \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$$

On rappelle le théorème fondamental de l'Algèbre :

Théorème 11. *Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ est scindé.*

Ce résultat n'est pas vrai si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, comme le montre l'exemple du polynôme $P[X] = X^2+1$. Bienque $X^2 + 1 = (X + i)(X - i)$, i n'est pas réel.

Corollaire 9.

1. *Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ possède au moins une valeur propre (complexe).*
2. *Une matrice $A \in M_{2n+1}(\mathbb{R})$ possède au moins une valeur propre réelle.*

Démonstration. Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ alors le polynôme caractéristique est scindé (sur $\mathbb{C}$). Un polynôme scindé admet au moins une racine. D'où le premier resultat.

Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, alors A est aussi une matrice à coefficient complexe, c.à.d. $A \in M_n(\mathbb{C})$. Le polynôme caractéristique de A est donc scindé sur $\mathbb{C}$, mais pas forcément sur $\mathbb{R}$. Or, comme A est une matrice réelle, son polynôme caractéristique P_A a des coefficients réels. Donc

$$P_A(\bar{\lambda}) = \overline{P_A(\lambda)}.$$

Ainsi, si λ est un racine de multiplicité m_λ alors $\bar{\lambda}$ est un racine de multiplicité $m_{\bar{\lambda}} = m_\lambda$. Il en suit que, si P_A n'a pas de racine réelle, alors son degré est pair. □

Une matrice $A \in M_{2n}(\mathbb{R})$ possède une valeur propre complexe, mais pas forcément une valeur propre réelle. Il faut faire attention à ca.

Lemme 7. *On a $m_\lambda \geq g_\lambda = \dim E_\lambda$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{B}_\lambda$ une base pour E_λ. On peut la compléter en une base $\mathcal{B}$ pour E. Si $\mathcal{B}_\lambda$ sont les premiers éléments de la base alors

$$[u]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \lambda 1_{g_\lambda} & B \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

une forme block triangulaire où le block en haut à gauge est la matrice diagonale de taille $g_\lambda = \dim E_\lambda$, qui a partout λ sur la diagonale. On calcule rapidement

$$P_u(\lambda') = (\lambda - \lambda')^{g_\lambda} P_D(\lambda')$$

ce qui montre que m_λ est au moins aussi grand que g_λ. □

Théorème 12 (Deuxième critère de diagonalisation)**.** *Soit u un endomorophism d'un espace vectoriel de dimension n. u est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et pour toute valeur propre λ la multiplicité algébrique et la multiplicité géométrique coincident, c.à.d. $m_\lambda = g_\lambda$.*

Démonstration. Supposons que le polynôme caractéristique de u est scindé. Alors la somme des multiplicités algébriques m_λ est n. Si, de plus, $m_\lambda = g_\lambda$ pour toute valeur propre, alors la somme des g_λ est aussi n. Donc, par Lemma 5, u est diagonalisable.

Si u est diagonalisable on choisit une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres. Alors $[u]_\mathcal{B}$ est diagonal, disons $[u]_\mathcal{B} = \text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ (ici les λ_i ne sont pas forcément distincts). On calcule rapidement que

$$P_u(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda).$$

Donc P_u est scindé. Par Lemma 5 la somme des g_λ est n et comme $m_\lambda \geq g_\lambda$ et la somme des m_λ est le degré de P_A on doit avoir $g_\lambda = m_\lambda$ pour tout valeur propre λ. □

Il en suit une condition suffisante pourque u soit diagonalisable, mais cette condition n'est pas necessaire.

Corollaire 10. *Si u admet n valeurs propres disctinctes (ou de façon équivalente, si P_u est scindé à racines simples) alors u est diagonalisable.*

Démonstration. L'hypothèse nous dit que $1 = m_\lambda \geq g_\lambda \geq 1$ pour toute valeur propre λ. □

3.3.1 Algorithme de diagonalisation

Étant donné un endomorphisme u diagonalisable, on se pose le problème de trouver une base $\mathcal{B}$ t.q. $[u]_\mathcal{B}$ soit diagonale et puis d'expliciter la forme de $[u]_\mathcal{B}$. Voici les étappes :

1. Trouver les racines du polynôme caractéristique P_u. Chaque racine λ_i est une valeur propre.
2. Résoudre l'équation $(u - \lambda_i \mathrm{id})(x) = 0_E$ pour chaque i. Les solutions forment l'espace propre E_{λ_i} de λ_i. Choisir une base $\mathcal{B}_i$ pour E_{λ_i}.
3. La matrice $[u]_\mathcal{B}$ associée à u dans la base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$ est alors une matrice diagonale, qui contient les valeurs propres sur la diagonale, chaqu'une autant de fois que sa multiplicité algébrique.

Des bases différentes pour E peuvent amener à une matrice diagonale. Néanmoins, à part de l'ordre des éléments sur la diagonale, la forme diagonale de u est unique.

Étant donnée une matrice A, donc un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ ou la matrice d'un endomorphism $A = [u]_\mathcal{B}$ dans une base $\mathcal{B}$, diagonaliser A veut dire de trouver une autre base dans laquelle elle est diagonale. Déterminer une forme diagonale de A correspond donc à un changement de base. Voici les étappes :

1. Trouver les racines du polynômes caractéristiques P_A. Chaque racine λ_i est une valeur propre de A.
2. Résoudre l'équation $(A - \lambda_i 1_n)x = 0$ pour chaque i. Ici $A - \lambda_i 1_n$ est une matrice $n \times n$ et x est un vecteur colonne de taille n. Les solutions forment l'espace propre E_{λ_i} de λ_i exprimé dans la base canonique. Ainsi on trouve g_{λ_i} vecteurs propres linéairement indépendents pour chaque i et, mise ensemble, on obtient n vecteurs propres linéairement indépendents.
3. La forme diagonale D pour A est alors

   $$D = P^{-1}AP$$

   où P est la matrice dont la $j$ième colonne correspond au $j$ième vecteur propre.

   D est alors une matrice diagonale qui contient chaque valeur propre autant de fois que sa multiplicité algébrique.

On remarque que la matrice P est la matrice de passage de la base canonique vers la base donnée par les vecteurs propres qu'on a déterminé. La base des vecteurs propres n'est pas unique donc P dépendent des choix. Pourtant, à part de l'ordre des éléments sur la diagonale, D est unique.

On pourrait donc répondre à la première question du chapitre : le spectre d'un endomorphisme avec multiplicité ne dépend pas de la base. Il en suit que toute quantité qui s'exprime avec le spectre (le déterminant, la trace,...) ne dépendent pas de la base.