Université Claude Bernard Lyon 1 — UE Analyse 1 pour les mathématiciens
Semestre d'automne 2023-2024

Examen 2 – Durée 60 min – le mardi 21 novembre 2023
Sujet Blanc

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.
BIEN INDIQUER SON NUMÉRO DE GROUPE DE TD SUR LA COPIE (A, B ... G)
L'énoncé comporte quatre exercices.

Exercice 1. Question préparée.

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles qui tendent respectivement vers l_1 et l_2, avec l_1 et l_2 dans $\mathbb{R}$. Que dire de la suite $(U_n+V_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Démontrer le résultat énoncé.

Exercice 2. Équation et inéquation.

1. Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant $|x+1|-x+1=x^2$.
2. Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant $|x+1|-x+1<x^2$.

Exercice 3. Constante d'Euler.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout $n\geq 1$ par :

$$u_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)$$

On note également ϕ la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $\phi(x)=\ln(1+x)-x$.

1. Dresser le tableau de variation de ϕ et en déduire le signe de ϕ.
2. En déduire que, pour tout entier $n\geq 1$, on a
$$\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)=\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\leq -\frac{1}{n+1}.$$
3. En utilisant la question précédente, étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. Montrer que, pour tout $n\geq 2$, on a
$$u_n=\frac{1}{n}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right).$$
5. En déduire que, pour tout $n\geq 1$, u_n est positif.
6. Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Que peut-on dire de sa limite ?

Remarque : *La limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est appelée constante d'Euler et habituellement notée γ.*

Exercice 4. Arctangentes.

On considère les fonctions g et f suivantes :

$$g : x \mapsto \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} \qquad \text{et } f \,:\, x \longmapsto \arctan\left(\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}\right).$$

1. Quel est l'ensemble de définition de g ? Est-elle paire ? Impaire ?
2. Calculer la dérivée de g.
3. Déterminer l'ensemble de définition de f. Est-elle paire ? Impaire ?
4. Calculer la dérivée f' de f.
   On pourra remarquer que $x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1 = (1 + x^2)^3$.
5. Montrer que
   $$\forall x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right[, \qquad \arctan\left(\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}\right) = 3\arctan(x).$$
6. **Question subsidiaire.** On fixe un réel $y > 0$. On regarde la fonction
   $$\begin{array}{rccl} h_y \,: & \mathbb{R}^+ - \{\frac{1}{y}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \arctan\left(\dfrac{x + y}{1 - xy}\right). \end{array}$$
   Calculer la dérivée de h_y. Puis, en déduire que
   $$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \text{ t.q. } xy < 1, \qquad \arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right).$$