Correction Feuille 4 : Limites et continuité des fonctions

Exercice 1. Soit $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq -1 \\ x^2+1 & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ \sin(x/4) & \text{si } x > 0. \end{cases}$

1. Dessiner le graphe de f.

2. Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to -1-} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$ e) $\lim\limits_{x\to \pi-} f(x)$
b) $\lim\limits_{x\to -1+} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ f) $\lim\limits_{x\to \pi+} f(x)$

Est-ce que les limites suivantes existent ? Si oui, donner leur valeur.

a) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to \pi} f(x)$

Correction

Par définition de f, on a :

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (-2x) = 2\,, \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (x^2+1) = 2\,.$$

De façon analogue, on a :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2+1) = 1\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sin(x/4) = 0$$
$$\lim_{x\to \pi^-} f(x) = \lim_{x\to \pi^-} \sin(x/4) = \sqrt{2}/2\,, \qquad \lim_{x\to \pi^+} f(x) = \lim_{x\to \pi^+} \sin(x/4) = \sqrt{2}/2\,.$$

On en déduit que les limites (a) et (c) existent, et elles valent respectivement 2 et $\sqrt{2}/2$, tandis que la limite (b) n'existe pas.

Exercice 2. Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ 3) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2x+5}{x-4}$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^9-17}{x^7}$ 5) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^3-5x^2+7}{8+2x-5x^3}$ 6) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+3}{x^3+2}$

7) $\lim\limits_{x\to 1} |x-1|$ 8) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{|x-1|}$ 9) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{1}{|x-1|}$

10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{1+x}-1}$ 11) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1-x^2}\right)$ 12) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+2x+5} - x$

13) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sin x}{x}$ 14) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin(\dfrac{1}{x})$ 15) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+\sin x}{x^2+\cos x}$

16) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$ 17) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1+2\sin(x)}{1+\sqrt{x}}$ 18) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{x-\sin x}$

Correction

1. On a $x^2-4 = (x-2)(x+2)$, d'où

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} (x+2) = 4\,.$$

2. Décomposer $x^2-1 = (x-1)(x+1)$ et $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$ et simplifier.
3. La limite n'existe pas : étudier la limite quand $x \to 4^-$ et $x \to 4^+$.

4. La limite vaut $+\infty$ (comparer les puissances les plus élevées au numérateur et au dénominateur).
5. Comme le précédent : la limite vaut $-3/5$.
6. Encore comme le précédent. La limite vaut 0.
7. 0.
8. $+\infty$.
9. $1/4$.
10. En multipliant numérateur et dénominateur par $\sqrt{1+x}+1$, on trouve que
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}-1} = \frac{\sqrt{1+x}+1}{(1+x)-1} = \frac{\sqrt{1+x}+1}{x},$$
d'où on trouve que la limite n'existe pas ($x \to 0^+$ et $x \to 0^-$).
11. On a
$$\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2} = \frac{x}{(1-x)(1+x)},$$
d'où c'est simple à voir que la limite n'existe pas.
12. On a
$$\sqrt{x^2+2x+5}-x = \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+2x+5}+x} = \frac{2x+5}{x\left(\sqrt{1+(2/x)+(5/x^2)}+1\right)} \longrightarrow_{x\to+\infty} 1\,.$$
13. 0.
14. 0.
15. Il faut mettre en facteur, au numérateur et au dénominateur, les quantités qui convergent à l'infini plus rapidement que les autres. On trouve donc que la limite vaut 1.
16. On écrit
$$x^x = e^{x\ln x} \longrightarrow_{x\to 0^+} e^0 = 1\,.$$
17. 0.
18. $+\infty$.

Exercice 3. Rappelons que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et que $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{x}}$	2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin(1/x)}{\sin x}$	3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$
4) $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{\cos(\pi x)}{1-2x}$	5) $\lim\limits_{x\to 1/2}(2x^2+x-1)\tan(\pi x)$	6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - 1}{x^2}$
7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x}$	8) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln^3 x$	9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\exp(\ln^2 x)}{x^n}$, $n\in\mathbb{Z}$

Correction

1. On a
$$\frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}} = \frac{\sin(2x)}{2x}\,2\sqrt{x} \longrightarrow 0 \qquad \text{quand } x \to 0.$$
2. Du moment que $\sin x/x \to 1$ quand $x \to 0$ et que $x\sin(1/x) \to 0$, on a que la deuxième limite vaut 0.
3. Par définition de la fonction tan, on a
$$\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x}\cos x \longrightarrow \cos(0) = 1 \qquad \text{quand } x\to 0.$$
4. On change la variable en posant $1-2x=y$, et donc $x=(1-y)/2$. En utilisant que $\cos(\pi/2-\alpha) = \sin(\alpha)$ (faire un dessin pour le prouver), on a
$$\lim_{x\to 1/2}\frac{\cos(\pi x)}{1-2x} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)}{\frac{\pi}{2}y}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

5. De façon similaire, on commence par noter que $2x^2+x-1=(2x-1)(x+1)$. On pose alors $2x-1=y$, d'où $x=(1+y)/2$. Grâce aux formules $\sin(\alpha+\pi/2)=\cos(\alpha)$ et $\cos(\alpha+\pi/2)=-\sin(\alpha)$, on trouve alors

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1/2}(2x^2+x-1)\tan(\pi x) &= \lim_{y\to 0} y\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}y\right)\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}y\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}y\right)}\\ &= \lim_{y\to 0}\frac{y}{2}(3+y)\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)}\\ &= \lim_{y\to 0}\frac{\frac{\pi}{2}y}{\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)}\frac{-(3+y)}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) = -\frac{3}{\pi}.\end{aligned}$$

6. On peut écrire

$$\frac{\cos x-1}{x^2} = \frac{\cos^2 x-1}{x^2(1+\cos x)} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{-1}{1+\cos x} \longrightarrow -\frac{1}{2} \qquad \text{quand } x\to 0.$$

7. Quand $x\to 0$, on a

$$\frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x} = \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\frac{x^2}{\sin^2 x} \longrightarrow 1.$$

8. La limite vaut 0 par croissances comparées.
9. On a $x^n=\exp(n\ln x)$, d'où on trouve

$$\frac{\exp(\ln^2 x)}{x^n} = \exp\big(\ln x\big(\ln x-n\big)\big).$$

On en déduit que la limite vaut $+\infty$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$.

1) Si $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-5}{x-2}=5$, trouver $\displaystyle\lim_{x\to 2}f(x)$. 2) Si $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=-2$, trouver $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$.

Exercice 4. Correction

La première limite vaut 5, la deuxième vaut 0. Pour le voir, on peut :

— soit raisonner par l'absurde : si le numérateur ne tend pas à 0, la limite ne peut pas être finie (car le dénominateur tend à 0) ;

— soit utiliser la définition de limite.

Exercice 5. Étudier la continuité à gauche, la continuité à droite et la continuité des fonctions suivantes en chaque point de leur domaine de définition.

1. $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{si } 0\le x\le 1\\ 2x-1 & \text{si } 1<x\le 2\end{cases}$
2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x+\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=1$.
3. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=xE(1/x)$ si $x\neq 0$ et $f(0)=1$, où E dénote la partie entière.

<u>Correction</u>

1. Pour tout $x\in\,]0,1[$, $f(x)=x^2$ coïncide avec une fonction continue, donc elle est continue en tout point de $]0,1[$; le même argument s'applique à tout point dans $]1,2[$. En plus, pour la même raison on a que $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x^2=0=f(0)$, donc f est continue à droite en 0 ; de façon pareil, on voit que f est continue à gauche en 2. Finalement, on a

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}x^2=1=\lim_{x\to 1^+}(2x-1)=\lim_{x\to 1^+}f(x) \qquad \text{et} \qquad f(1)=1,$$

donc f est continue aussi en 1.

2. Le même argument de l'exercice précédent montre que f est continue en tout point $x \neq 0$. Considérons maintenant le cas $x = 0$. On rappelle que $\sqrt{x^2} = |x|$. Donc

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x+1) = 1, \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x-1) = -1\,.$$

On en déduit que f n'est pas continue en 0, mais continue à droite.

3. On commence par étudier la continuité en 0. Si $x > 0$, par définition de partie entière on a $E(1/x) \leq 1/x < E(1/x) + 1$, qui implique que

$$0 \leq xE(1/x) \leq 1 < xE(1/x) + x \leq 1 + x.$$

Par le théorème des gendarmes, on trouve alors que $xE(1/x) \to 1$ pour $x \to 0^+$. La même inégalité de départ montre, en inversant les signes d'inégalité quand on multiplie par x, que aussi la limite pour $x \to 0^-$ vaut 1. Donc la fonction est continue en 0.
Après, on remarque que pour tout $x > 1$ on a $E(1/x) = 0$, ce qui implique que $f(x) = 0$ pour tout $x > 1$. Alors on a $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$. En revanche, quand $x \to 1^-$ on a $E(1/x) = 1$, d'où on déduit que $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$. Donc, f n'est pas continue en 1, mais continue à droite. Le même argument montre que les points $1/n$, avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sont des points de discontinuité et continuité à droite pour f.
Enfin, la continuité de f pour les $x < 0$ peut être déduite du discours précédent, en utilisant que, pour tout $x > 0$, on a $E(-x) = -E(x) - 1$.

Exercice 6.
1. Déterminer les valeurs de $k \in \mathbb{R}$ pour lesquelles f_k définie par $f_k(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ k - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ est une fonction continue.
2. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \dfrac{1+x^3}{1+x}$. Trouver une application continue $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $g|_{\mathbb{R}\setminus\{-1\}} = f$

Correction
1. Pour $x \neq 2$, la fonction est clairement continue, il faut donc juste choisir le k de manière que les deux termes coïncident à $x = 2$, c'est-à-dire $2^2 = k - 2^2$ ou bien $k = 8$. La seule valeur k telle que f_k est une fonction continue vaut donc 8.
2. Comme $1 + x^3 = (1+x)(1-x+x^2)$, la fonction $g(x) = x^2 - x + 1$ est continue et coïncide avec f pour $x \neq -1$.

Exercice 7. Montrer que l'équation $x^3 - 15x + 1 = 0$ a trois solutions dans l'intervalle $[-4, 4]$.

Correction On calcule les valeurs de polynômes sur les bords de l'intervalle et pour des arguments simples :
Pour $x = -4$, on obtient $x^3 - 15x + 1 = 16x - 15x + 1 = x + 1 = -3 < 0$.
Pour $x = 0$, on obtient $1 > 0$.
Pour $x = 1$, on obtient $x^3 - 15x + 1 = 1 - 15 + 1 < 0$.
Pour $x = 4$, on obtient $x^3 - 15x + 1 = 16x - 15x + 1 = x + 1 = 5 > 0$

Par la continuité de polynôme et le théorème des valeurs intermédiaires, il y a donc une solution dans $]-4, 0[$, une solution dans $]0, 1[$ et une solution dans $]1, 4[$.

Exercice 8. Montrer qu'il existe $x \in [3\pi/4, \pi]$ tel que

$$\tan x + \frac{x}{3} = 0.$$

Correction On évalue l'expression à $x = 3\pi/4$ et à $x = \pi$ et on trouve $-1/4 < 0$ et $\pi/3 > 0$. Par la continuité de la tangente et le théorème de valeurs intermédiaires, l'expression a donc un zéro dans l'intervalle donné.

Exercice 9. Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors f est surjective.

<u>**Correction**</u> Soit $y \in \mathbb{R}$. Par la limite vers $-\infty$, il existe forcement une valeur $a \in \mathbb{R}$ telle que $a < 0$ et $f(a) < y$. Par la limite vers ∞, il existe forcement une valeur $b \in \mathbb{R}$ telle que $b > 0$ et $f(b) > y$.

Par la continuité de f et le théorème de valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) = y$. Comme y était un réel arbitraire, la fonction f est bien surjective.

Exercice 10. Quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues dont l'image est contenue dans $\mathbb{Z}$? dans $\mathbb{Q}$?

<u>**Correction**</u> Il s'agit des fonctions constantes, parce qu'une fonction continue qui prend deux valeurs distinctes admet aussi l'intervalle des valeurs intermédiaires entre ces deux valeurs, mais cet intervalle contient toujours de réels non-entiers/non-rationnels.

Exercice 11. Pour tout entier $n \geq 2$, on considère la fonction $f_n : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ donnée par

$$f_n(x) = x^n - x - 1$$

1. Montrer qu'il existe un unique $x_n > 1$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que $f_{n+1}(x_n) > 0$.
3. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est décroissante et converge vers une limite l.
4. Déterminer l.

<u>**Correction**</u>

1. On a $f_n(1) = -1 < 0$ et $\lim_{x\to\infty} f_n(x) = \infty$ (parce que le terme dominant est positif). Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc bien $x_n > 1$ tel que $f_n(x_n) = 0$. Comme $f_n'(x) = nx^{n-1} - 1 \geq 2 - 1 = 1 > 0$, la fonction est strictement croissante. Donc, x_n est unique.
2. Par définition de x_n, on a $x_n^n = x_n + 1$. On obtient
$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - x_n - 1 = x_n(x_n + 1) - x_n - 1 = x_n^2 - 1 > 0.$$
3. Comme $f_{n+1}(1) = -1 < 0$ et $f_{n+1}(x_n) > 0$ par le resultat précédent, on a bien $1 < x_{n+1} < x_n$ et la suite est décroissante. Comme la suite est minorée par 1, elle converge vers une limite l.
4. Comme $x_n > 1$, on sait que $l \geq 1$. Si la limite $l > 1$, on obtient la minoration divergente
$$l + 1 = \lim_{n\to\infty}(x_n + 1) = \lim_{n\to\infty} x_n^n \geq \lim_{n\to\infty} l^n = \infty.$$
On conclut que $l = 1$.

Exercice 12. Vrai ou faux ?

1. Si f est continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$, alors $f([a, b])$ est un intervalle fermé borné.
2. Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a, b[$ vers $\mathbb{R}$, alors $f(]a, b[)$ est un intervalle ouvert borné.
3. Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a, b[$ vers $\mathbb{R}$, alors $f(]a, b[)$ est un intervalle ouvert, mais pas forcément borné.
4. Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a, b[$ vers $\mathbb{R}$, alors $f(]a, b[)$ est un intervalle, mais pas forcément ouvert ni borné.

<u>**Correction**</u>

1. Vrai. La fonction admet un minimum et un maximum et par le théorème des valeurs intermédiaires atteint aussi tout l'intervalle $[\min, \max]$.
2. Faux. Contre-exemples : f la fonction constante qui ne donne pas un intervalle ouvert. $f(x) = 1/x$ sur $]0, 1[$ qui n'est pas bornée.
3. Faux. Contre-exemple : fonction constante.
4. Vrai. La fonction atteint toutes les valeurs entre $\inf\{f(x)\}$ et $\sup\{f(x)\}$ par le théorème des valeurs intermédiares ce qui donne toujours un intervalle qui pourrait avoir des bornes $\pm\infty$ ou inclure ses bornes si la fonction admet un minimum ou maximum.