Feuille 3 : Suites réelles

Exercice 1. Déterminer les limites éventuelles des suites suivantes, définies par leur terme général.

1. $u_n = \dfrac{n+2}{2n-1}$
2. $u_n = \dfrac{3n^2-2n+3}{n^3-1}$
3. $u_n = \dfrac{3n^2-5}{n+4}$
4. $u_n = \dfrac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n-1}}$
5. $u_n = \dfrac{\sqrt{n+5}+n}{\sqrt{n^2+1}}$
6. $u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$
7. $u_n = \sin n$
8. $u_n = \dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$
9. $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
10. $u_n = \dfrac{n-(-1)^n}{2n+(-1)^n}$
11. $u_n = \cos(n\pi)$
12. $u_n = \dfrac{3^n-2^n}{2^n-3^n}$
13. $u_n = \dfrac{2^n}{n^{100}}$
14. $u_n = \cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$
15. $u_n = (-1)^n\dfrac{\cos n}{n}$
16. $u_n = \cos\left(\dfrac{n}{2}\pi\right)$

Exercice 2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Montrer qu'elle converge et que sa limite ℓ vérifie :

$$\frac{1}{2} \leq \ell \leq 1.$$

3. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = +\infty$.

Exercice 3. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 8$ et la relation de récurrence $u_n = \dfrac{1}{2}u_{n-1}+3$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Comment s'appelle la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. Résoudre l'équation $\alpha = \dfrac{1}{2}\alpha + 3$.
3. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - \alpha$. Écrire v_n en fonction de v_{n-1}.
4. Déterminer v_n en fonction de n.
5. Déterminer u_n en fonction de n. Quelle est sa limite ?

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n+8}{2u_n+1}.$$

On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{u_n-2}{u_n+2}.$$

1. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-\dfrac{3}{5}$.
2. Exprimer v_n en fonction de n.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n-1}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 6. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_n = \sqrt{1+u_{n-1}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 2$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 7. Étudier la convergence et calculer l'éventuelle limite de chacune de ces suites :

1. $u_{n+1} = \dfrac{1}{6}u_n + 5,\ u_0 = 3$
2. $u_{n+1} = -2u_n + 1,\ u_0 = 0$
3. $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n},\ u_0 = 8$
4. $u_{n+1} = \sqrt{4+3u_n},\ u_0 = 2$
5. $u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{2}{9},\ u_0 = 0$
6. $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1},\ u_0 = 2$

Exercice 8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels différents de -1 telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{1+u_n} = 0$. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Exercice 9. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante telle que la sous-suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi convergente.

Exercice 10. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in [0,1]$ et $u_n = \dfrac{3-u_{n-1}^2}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{3-x^2}{2}$.
   (a) Montrer que f est décroissante sur $[0,\infty[$.
   (b) Montrer que l'intervalle $[0,\sqrt{3}]$ est stable par f.
   Quelle conclusion en tirer sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   (c) Trouver $\ell \in [0,+\infty[$ tel que $f(\ell) = \ell$.
2. Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement croissante et décroissante.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 11. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = u_n + v_n$.

1. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Que peut on dire de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. On suppose que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas. Que peut on dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Donner un exemple de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergentes telles que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente.

Exercice 12. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $w_n = u_n^2 + u_n v_n + v_n^2$ soit convergente vers 0.

1. En utilisant une identité remarquable, écrire w_n comme la somme de 2 carrés.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent aussi vers 0.

Exercice 13. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

1. On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 10$
   (a) Justifier qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $u_{n+1} \geq 5u_n$.
   (b) Montrer qu'alors, pour tout $n \geq N$, $u_n \geq 5^{n-N}u_N$.
   (c) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
2. On suppose à présent que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$
   (a) Justifier qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}u_n$.
   (b) En raisonnant comme avant, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge cette fois vers 0.

Exercice 14. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes.

Exercice 15. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante de limite ℓ. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{u_1 + ... + u_n}{n}.$$

1. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq \ell$. En déduire que (v_n) converge.
3. On note ℓ' la limite de (v_n). Peut-on donner une inégalité entre ℓ et ℓ' ?
4. Établir que $v_{2n} \geq \dfrac{u_n + v_n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. En passant à la limite dans l'inégalité précédente, en déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ.

Exercice 16.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout $n > 0$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

À l'aide de la question 1, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 17. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 \in]1,2[$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{4} + \dfrac{3}{4}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 1$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 2$.
3. Montrer que la suite est monotone. En déduire sa convergence.
4. Déterminer sa limite.

Exercice 18. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1.$$

1. On introduit la fonction $f(x) = (x-1)^2 + 1$.
   Montrer que f est croissante sur $[1, \infty[$. Déterminer l'image de l'intervalle $]1, 2[$ par f.
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 < u_n < 2$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
4. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 19. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n^2 + \frac{3}{2}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.
2. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, quelle peut être sa limite éventuelle ?
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 3$.
4. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Que peut-on en conclure ?

Exercice 20. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_n = 1 + \dfrac{1}{u_{n-1}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq u_n \leq 2$.

3. Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
4. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 21. Étudier la monotonie des suites définies par les termes généraux suivants :

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1} \text{ (pour } n\geq 1), \quad n-2^n, \quad \frac{e^n}{n!}, \quad (n+1)(n+2)\dots(n+n), \quad \frac{n-1}{n+3}, \quad n-\mathrm{sh}(n).$$

Exercice 22. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites définies par :

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} \qquad\qquad v_n=u_n+\frac{1}{n.n!}$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes.