Correction Feuille 1 : Nombres réels

Exercice 1 (Automatismes - Simplifications).
Simplifier et calculer les expressions suivantes :

1. $2^3 \times 2^2$
2. $5^3 \cdot 5^{-4}$
3. $\dfrac{3^2}{3^5}$
4. $\left(7^5\right)^3$
5. $\left(2^3\right)^{-2}$
6. $\dfrac{8^3}{4^3}$
7. $\dfrac{5^2 \times 10^3}{2^6}$
8. $\sqrt{3} \times \sqrt{6}$
9. $\dfrac{\sqrt{10}\,\sqrt{42}}{\sqrt{35}\,\sqrt{6}}$

Correction

1. $2^3 \times 2^2 = 2^5 = 32$
2. $5^3 \cdot 5^{-4} = 5^{-1} = \dfrac{1}{5} = 0.2$
3. $\dfrac{3^2}{3^5} = \dfrac{1}{3^3} = \dfrac{1}{27}$
4. $\left(7^5\right)^3 = 7^{15}$
5. $\left(2^3\right)^{-2} = \dfrac{1}{2^6} = \dfrac{1}{64}$
6. $\dfrac{8^3}{4^3} = 2^3 = 8$
7. $\dfrac{5^2 \times 10^3}{2^6} = \dfrac{5^5}{2^3}$
8. $\sqrt{3} \times \sqrt{6} = 3\sqrt{2}$
9. $\dfrac{\sqrt{10}\,\sqrt{42}}{\sqrt{35}\,\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{420}}{\sqrt{210}} = \sqrt{2}$

Exercice 2 (Automatismes - Puissances).
Pour x et y des réels non nuls, et a et b des entiers, donner une autre écriture des expressions suivantes :

1. $(x^a)^b$
2. x^{a+b}
3. $(x \times y)^a$

Correction

1. $(x^a)^b = x^{a\times b}$ (pour tout x non nul si a ou b est négatif; pour tout x réel si a et b sont positifs)
2. $x^{a+b} = x^a \times x^b$ (mêmes conditions d'existence)
3. $(x \times y)^a$

Exercice 3 (Automatismes - Simplification d'expressions).
Soit x et y des réels; en supposant qu'elle est bien définie, fournir une forme plus simple de chacune des expressions suivantes :

1. $(5x)^3$
2. $(-1)^{2001}$
3. $(-2y)^4$
4. $(4^2)^{\frac{1}{4}}$
5. $(125)^{-2/3}$
6. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}}$
7. $\left(\dfrac{x^{-2}}{y^{-2}}\right)\left(\dfrac{x}{y}\right)^2$
8. $-2\sqrt{9y} + 10\sqrt{y}$
9. $\left[\left(x^2y^{-2}\right)^{-1}\right]^{-1}$
10. $5^{-1/2} \cdot 5x^{11/6} \cdot (5x)^{-3/2}$

Correction

1. $(-5x)^3 = (-1)^3\, 5^3\, x^3 \;=\; -125x.$
2. $(-1)^{2001} = (-1)^{2000} \times (-1) = ((-1)^2)^{1000} \times (-1) = -1$
3. $(-2y)^4 = (-2)^4 \times y^4 = 16\ y$
4. $(4^2)^{1/4} = ((2^2)^2)^{1/4} = (2^4)^{1/4} = 2^{4/4} = 2.$
5. $\sqrt[3]{125} = 5$, d'où $(125)^{-2/3} = 1/25.$
6. On a $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}} \;=\; \left(27^{1/4}\right)^{1/3} \;=\; 27^{(1/4)\cdot(1/3)} \;=\; \left(27^{1/3}\right)^{1/4} \;=\; 3^{1/4} \;=\; \sqrt[4]{3}.$

7. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a
$$\frac{x^\alpha}{y^\alpha} = \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha ;$$
on en déduit que
$$\frac{x^{-2}}{y^{-2}} \left(\frac{x}{y}\right)^2 = 1 .$$
8. $\sqrt{9y} = \sqrt{9}\sqrt{y}$; donc, on peut factoriser par $2\sqrt{y}$ et on trouve
$$-2\sqrt{9y} + 10\sqrt{y} = 2\sqrt{y}\left(5 - \sqrt{9}\right) = 4\sqrt{y} .$$
9. $\left[\left(x^2y^{-2}\right)^{-1}\right]^{-1} = \left(x^2y^{-2}\right)^{(-1\cdot(-1))} = x^2/y^2$.
10. On a
$$5^{-1/2}\cdot 5x^{11/6}\cdot(5x)^{-3/2} = 5^{-1/2+1-3/2}\,x^{11/6-3/2} = 5^{-1}\,x^{1/3} = \frac{\sqrt[3]{x}}{5} .$$

Exercice 4 (Automatismes - Inégalités)**.**
Résoudre les inéquations suivantes pour x réel :

1. $7x + 9 > 0$
2. $-3x \geq 2$
3. $10x - 1 \leq 5$
4. $-7x - 2 > 0$
5. $11x + 9 \leq -4$
6. $-3x - 2 \geq 7$

Correction

1. $7x + 9 > 0$ ssi $x > -9/7$
2. $-3x \geq 2$ ssi $x \leq -\dfrac{2}{3}$
3. $10x - 1 \leq 5$ ssi $x \leq \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5} = 0.6$
4. $-7x - 2 > 0$ ssi $x < -\dfrac{2}{7}$
5. $11x + 9 \leq -4$ ssi $x \leq -\dfrac{13}{11}$
6. $-3x - 2 \geq 7$ ssi $x \leq -3$

Exercice 5 (Inégalités)**.**
Vrai ? Faux ? Justifier !

1. Soient x et y deux réels. Si $x + y \leq 7$ et $x \leq 3$ alors $y \leq 4$.
2. Pour tout couple $(x, y) \in [-2, -1] \times [2, 4]$, on a $xy \geq -4$.
3. Pour tout couple $(x, y) \in [-2, 7] \times [-4, 1]$, on a $-28 \leq xy \leq 8$.

Correction

1. Soient x et y deux réels. Si $x + y \leq 7$ et $x \leq 3$ alors $y \leq 4$.
   C'est FAUX : on exhibe un contre-exemple. Si on choisit $x = 0$ et $y = 8$ alors on a $x + y \leq 7$ et $y > 4$. **On ne fait pas de différences d'inégalités.**
2. Pour tout couple $(x, y) \in [-2, -1] \times [2, 4]$, on a $xy \geq -4$.
   C'est FAUX : on exhibe un contre-exemple. Avec $x = -2$ et $y = 3$ on a $xy = -6 < -4$. **On ne multiplie des inégalités que si tous les termes sont positifs**.
3. Pour tout couple $(x, y) \in [-2, 7] \times [-4, 1]$, on a $-28 \leq xy \leq 8$.
   C'est VRAI. On peut aller plus vite que ce qui est proposé dans la correction ci-dessous, mais mieux vaut entraîner les étudiants à être rigoureux !
   On raisonne par disjonction de cas, suivant les signes de x et y :
   1er cas : Soient $x \in [0, 7]$ et $y \in [0, 1]$: alors
$$0 \leq x \leq 7$$
$$0 \leq y \leq 1$$
   Donc $0 \leq xy \leq 7$. On a bien $-28 \leq xy \leq 8$.

2ème cas Soient $x \in [-2, 0[$ et $y \in [0, 1]$. Alors

$$0 < -x \leq 2$$
$$0 \leq y \leq 1$$

Donc $0 \leq -xy \leq 2$, ou encore $-2 \leq xy \leq 0$.
On a bien à nouveau $-28 \leq xy \leq 8$.
3ème cas Soient $x \in [0, 7]$ et $y \in [-4, 0[$. Alors

$$0 < x \leq 7$$
$$0 < -y \leq 4$$

Donc $0 \leq -xy \leq 28$ et $0 \geq xy \geq -28$.
On a bien à nouveau $-28 \leq xy \leq 8$.
4ème cas Soient $x \in [-2, 0[$ et $y \in [-4, 0[$. Alors

$$0 < -x \leq 2$$
$$0 < -y \leq 4$$

Donc $0 \leq xy \leq 8$.
On a bien à nouveau $-28 \leq xy \leq 8$.
L'ensemble des cas étudiés regroupent l'ensemble des cas possibles, donc on peut conclure que pour tout couple $(x, y) \in [-2, 7] \times [-4, 1]$, on a $-28 \leq xy \leq 8$.

Exercice 6 (Signe du trinôme)**.**
Résoudre les inéquations suivantes pour x réel :

1. $x^2 - 2x + 1 \geq 0$
2. $x^2 - 2x + 1 > 0$
3. $x^2 + 2x - 3 \leq 0$
4. $-x^2 + 5x + 14 > 0$
5. $-x^2 - 10x - 25 > 0$
6. $-x^2 + 14x - 49 < 0$

Correction

1. On reconnaît une inégalité remarquable dans le membre de gauche : pour tout réel x, on a $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$.
   Le carré d'un nombre réel étant toujours un réel positif ou non, on en déduit que, pour tout réel x, $x^2 - 2x + 1 \geq 0$.
   L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $\mathbb{R}$.
2. On reconnaît la même identité remarquable que dans la question précédent : on conclut alors facilement qu'un réel x vérifie $x^2 - 2x + 1 > 0$ si et seulement si $x - 1$ est non nul. L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $R \backslash \{1\}$, qui peut s'écrire également $]-\infty, 1[\cup]-1, +\infty[$.
3. On cherche à factoriser $x^2 + 2x - 3$, et pour cela, on détermine les racines du trinôme. On peut bien sûr calculer le discriminant, mais c'est plus rapide de remarquer que 1 est racine, et que le produit des racines est égal à -3. Les racines de ce trinôme sont donc 1 et -3.
   On a donc, pour tout réel x, $x^2 + 2x - 3 = (x-1)\ (x+3)$.
   Il reste à faire le tableau de signes pour en déduire que $x^2 + 2x - 3 \leq 0$ si et seulement si x appartient à $[-3, 1]$.

4. On calcule le discriminant du trinôme : $\Delta = 25 + 4 \times 14 = 81$, donc ses racines sont

$$x_1 = \frac{-5-9}{-2} = 7 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-5+9}{-2} = -2$$

On a donc, pour tout réel x :

$$-x^2 + 5x + 14 = -(X-7)\,(x+2).$$

On dresse le tableau de signes pour conclure : $-x^2 + 5x + 14 > 0$ ssi $x \in]-2, 7[$.

A retenir : un trinôme est du signe opposé à celui de son coefficient de degré 2 entre les racines.

5. On reconnaît une identité remarquable : Pour tout réel x, on a $-x^2 - 10x - 25 = -(x+5)^2$, donc $-x^2 - 10x - 25$ est toujours positif. L'ensemble des solutions de l'inéquation $-x^2 - 10x - 25 > 0$ est l'ensemble vide.
6. On reconnaît une identité remarquable : pour tout réel x, on a $-x^2 + 14x - 49 = -(x-7)^2$.
On en déduit que $-x^2 + 14x - 49 < 0$ si et seulement si x est différent de 7.
L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathbb{R}\backslash\{7\} = -\infty, 7[, \cup]7, +\infty[$.

Exercice 7. 1. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $-3x + 4 \geq x - 3$.

2. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $x^2 - 4x - 2 \geq 0$.
3. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $(x+2)^2 < -x$.
4. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $x^3 - 6x \geq x^2$.

<u>Correction</u>

1. Un calcul simple permet de trouver $4x \leq 7$, d'où $x \leq 7/4$.
2. Ça suffit de chercher les racines du polynôme $x^2 - 4x - 2$, qui sont $2 \pm \sqrt{6}$. L'inégalité est alors vérifiée pour tous les nombres réels x tels que $x \leq 2 - \sqrt{6}$ ou $x \geq 2 + \sqrt{6}$
3. On développe le carré et on amène x à gauche : on trouve $x^2+5x+4 < 0$. On remarque que $x^2+5x+4 = (x+4)(x+1)$, et alors $-4 < x < -1$.
4. L'inégalité à résoudre est équivalente à $x^3 - x^2 + 6x \geq 0$. On peut factoriser le membre de gauche de la façon suivante : $x^3 - x^2 + 6x = x(x^2 - x - 6) = x(x-3)(x+2)$. Un tableau de signes permet de trouver la solution $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 0 \text{ ou } x \geq 3\}$.

Exercice 8. 1. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{6}\}$ qui vérifient $\frac{-2}{6x+5} > 1$.

2. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, -\frac{2}{3}\}$ qui vérifient $\frac{1}{x-2} < \frac{2}{3x+2}$.

<u>Correction</u>

1. On amène le terme de gauche à droite : l'inégalité est donc équivalente à résoudre

$$1 + \frac{2}{6x+5} < 0\,.$$

On calcule le dénominateur en commun, et on trouve

$$\frac{6x+7}{6x+5} < 0\,.$$

En dressant un tableau de signes, on conclut que l'inégalité est vérifiée pour $x \in]-7/6, -5/6[$.

2. L'argument est tout à fait analogue au précédent : on amène le terme de gauche à droite et on calcule le dénominateur en commun. Après avoir multiplié par -1 pour se retrouver avec un coefficient de x positif au numérateur, on se retrouve à résoudre l'inégalité équivalente

$$\frac{x+6}{(3x+2)(x-2)} < 0\,.$$

On résout cette inégalité en dressant un tableau de signe, et on trouve l'ensemble des solutions $S =]-\infty, -6[\cup]-2/3, 2[$.

Exercice 9. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $|2-x| \leq 3-x$.

<u>**Correction**</u>

On sépare l'étude dans les deux cas suivants.

(i) Si $2-x \geq 0$, alors l'inégalité devient

$$2-x \leq 3-x \qquad \Longrightarrow \qquad 2 \leq 3\,,$$

ce qui est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$. Mais x doit vérifier $x \leq 2$, donc l'ensemble des solutions de la première inégalité est $]-\infty, 2]$.

(ii) si $2-x < 0$, alors on trouve

$$-2+x \leq 3-x \qquad \Longrightarrow \qquad 2x \leq 5\,,$$

ce qui est vrai pour $x \leq 5/2$. Mais x devait être plus grande que 2, donc la deuxième inégalité est vérifiée pour tout $x \in [2, 5/2]$.

En conclusion, l'inégalité est satisfaite pour tout $x \in]-\infty, 5/2]$.

<u>**Correction bis**</u> Soient A et B deux réels. On sait que $|A| \leq B$ si et seulement si $-B \leq A \leq B$.

On applique cette propriété dans le contexte de l'exercice :

Soit x un réel.

On a $|2-x| \leq 3-x$ ssi $-(3-x) \leq 2-x \leq 3-x$.

Or $-(3-x) \leq 2-x$ ssi $2x \leq 5$

et $2-x \leq 3-x$ ssi $2 \leq 3$ (qui est toujours vrai)

On conclut donc que $|2-x| \leq 3-x$ ssi $x \leq \dfrac{5}{2}$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $|2-x| \leq 3-x$ est donc $\left]-\infty, \dfrac{5}{2}\right]$.

Exercice 10. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| \leq \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.

<u>**Correction**</u>

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On calcule

$$0 \leq (x+y)^2 \;=\; x^2+y^2+2xy\,.$$

De la même manière, on a aussi

$$0 \leq (x-y)^2 \;=\; x^2+y^2-2xy\,.$$

Donc, en mettant ensemble ces deux inégalités, on trouve

$$-(x^2+y^2) \leq 2xy \leq x^2+y^2$$

ce qui est équivalent à dire que $2|xy| \leq x^2+y^2$.

Exercice 11. Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, $|1-x^4| \leq 4|1-x|$.

<u>**Correction**</u> On commence par remarquer que

$$1-x^4 \;=\; (1-x^2)\,(1+x^2) \;=\; (1-x)\,(1+x)\,(1+x^2)\,.$$

En utilisant le fait que $|ab| = |a|\,|b|$, on peut amener le terme de droite à gauche du signe d'inégalité et on peut mettre en facteur $|1-x|$: cela donne

$$|1-x|\,\big(|1+x|\,|1+x^2| \;-\; 4\big) \leq 0\,.$$

Maintenant, $|1-x| \geq 0$ pour tout x, donc cela suffit de résoudre

$$|1+x|\,|1+x^2| \;-\; 4 \;\leq\; 0\,.$$

On note que, pour $x \in [-1,1]$, les deux arguments de la valeur absolue sont positifs : en développant les produits, on trouve donc

$$x^3 + x^2 + x + 1 - 3 \leq 0\,.$$

Étant donné que $x \in [-1,1]$, par inégalité triangulaire on a que

$$x^3 + x^2 + x \;\leq\; |x^3 + x^2 + x| \;\leq\; |x|^3 + |x|^2 + |x| \;\leq\; 3\,,$$

qui dit que l'inégalité de départ est toujours vérifiée pour $x \in [-1,1]$.

Exercice 12. Pour x réel, on note $f(x) = |2 - |1-x||$. Exprimer $f(x)$ sans utiliser de valeur absolue en discutant selon la position de x sur l'axe réel, et tracer le graphe de f.

Correction

Premier cas : $1-x \geq 0$, c'est-à-dire $x \leq 1$. Dans ce cas, $f(x) = |2-(1-x)| = |1+x|$. Si en plus $1+x \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq -1$, alors $f(x) = 1+x$.

Si, au contraire, $x < -1$, on trouve $f(x) = -x-1$.

Deuxième cas : si $1-x < 0$, c'est-à-dire $x > 1$, alors $f(x) = |2+(1-x)| = |3-x|$. Si maintenant $x \leq 3$, alors $f(x) = 3-x$; si $x > 3$, on a $f(x) = x-3$.

Conclusion : Pour $x < -1$, on a $f(x) = -x-1$. Pour $-1 \leq x \leq 1$, on a $f(x) = 1+x$. Pour $1 < x \leq 3$, on a $f(x) = 3-x$. Enfin, si $x > 3$, on a $f(x) = x-3$.

Exercice 13. Expliciter trois réels a, b et c tels que pour tout réel x on ait :

$$x^3 - x^2 + 2x + 4 = (x+1)(ax^2 + bx + c)$$

puis en déduire l'ensemble des x réels pour lesquels $x^3 - x^2 + 2x + 4 > |x+1|$.

Correction

En développant les produits à droite, on trouve l'égalité

$$x^3 - x^2 + 2x + 4 \;=\; ax^3 \;+\; (a+b)x^2 \;+\; (b+c)x \;+\; c\,.$$

On en déduit que

$$a = 1\,, \quad a+b = -1\,, \quad b+c = 2\,, \quad c = 4\,,$$

c'est-à-dire $a = 1$, $c = 4$ et $b = -2$.

Pour telles valeurs de (a,b,c), on a une factorisation de $x^3 - x^2 + 2x + 4$:

$$x^3 - x^2 + 2x + 4 \;=\; (x+1)\,(x^2 - 2x + 4)\,.$$

On remarque que $x^2 - 2x + 4 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (soit on calcule les racines réelles par la formule, soit on reconnaît que ce terme est de la forme $a^2 + ab + b^2$). L'inégalité à résoudre devient alors

$$(x+1)\,(x^2 - 2x + 4) \;>\; |x+1|\,.$$

Vu que le terme de droite est positif et que $x^2 - 2x + \geq 0$, on doit avoir forcement $x+1 > 0$, c'est-à-dire $x > -1$. En utilisant cette remarque, on va résoudre alors

$$(x+1)\,(x^2 - 2x + 4) \;>\; x+1 \qquad \Longrightarrow \qquad (x+1)\,(x^2 - 2x + 3) \;>\; 0\,.$$

Encore une fois, $x+1 > 0$; en plus, et donc il faut résoudre $x^2 - 2x + 3 > 0$. Le polynôme $x^2 - 2x + 3$ a seulement des racines complexes, autrement dit la dernière inégalité est toujours vraie. L'ensemble des solutions est donc $\,]-1,+\infty[\,$.

Exercice 14 (Inéquations et équations)**.**

1. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $x^4 - 13x^2 + 36 \leq 0$.
2. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R} - \{-1,3\}$ qui vérifient $\dfrac{x-6}{3-x} < \dfrac{x+6}{x+1}$.

3. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $|x-3|+|x-7|=4$.
4. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $|x-1|+|x-2|<1$.

Correction

1. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $x^4-13x^2+36\leq 0$.
On considère le trinôme $y^2-13y+36$. Son discriminant est $\Delta=169-144=25$, donc ses racines sont $\dfrac{13-5}{2}=4$ et $\dfrac{13+5}{2}=9$.
On a donc, pour tout réel y, $y^2-13y+36=(y-5)\ (y-9)$.
On peut ensuite réaliser un tableau de signes pour en déduire que $y^2-13y+36\geq 0$ pour tout y de $]-\infty,5]\cup[9,+\infty[$.
Revenons à l'inéquation initiale : Pour tout réel x, on a $x^4-13x^2+36=(x^2)^2-13(x^2)+36$ Donc $x^4-13x^2+36\geq 0$ ssi x^2 appartient à $]-\infty,5]\cup[9,+\infty[$.
L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^4-13x^2+36\geq 0$ est donc $]-\infty,3]\cup[-\sqrt{5},\sqrt{5}]\cup[3,+\infty[$.
2. Le plus simple est de commencer par mettre les deux fractions dans le même membre de l'inégalité et de calculer leur somme. Il restera alors à réaliser un tableau de signes.
Soit $x\in\mathbb{R}-\{-1,3\}$.
On a $\dfrac{x-6}{3-x}<\dfrac{x+6}{x+1}$ ssi $\dfrac{x+6}{x+1}-\dfrac{x-6}{3-x}>0$.
Or
$$\frac{x+6}{x+1}-\frac{x-6}{3-x}=\frac{(x-3)(x+6)+(x+1)(x-6)}{(x+1)(x-3)}=\frac{x^2+3x-18+x^2-5x-6}{(x+1)(x-3)}=\frac{2(x^2-x-12)}{(x+1)(x-3)}$$
Le discriminant du trinôme x^2-x-12 est égal à 49 et ses racines sont $\dfrac{1-7}{2}=-3$ et $\dfrac{1+7}{2}=4$.
On a donc $\dfrac{x+6}{x+1}-\dfrac{x-6}{3-x}=\dfrac{(x+3)(x-4)}{(x+1)(x-3)}$.
Il reste alors à réaliser le tableau de signes et on obtient que $\dfrac{x-6}{3-x}<\dfrac{x+6}{x+1}$ ssi $x\in]-\infty,-3[\cup]-1,3[\cup]4,+\infty[$
3. On étudie $|x-3|+|x-7|$ sur chacun des intervalles $]-\infty,3]$, $[3,7]$ et $[7,+\infty[$.
   - Pour tout x dans $]-\infty,3]$, on a $|x-3|+|x-7|=-2x+10$
     Donc $|x-3|+|x-7|=4$ ssi $-2x+10=4$, ie $x=3$.
   - Pour tout x dans $[3,7]$, on a : $|x-3|+|x-7|=4$, donc tout réel de $[3,7]$ est solution.
   - Pour tout x dans $[7,+\infty[$, on a : $|x-3|+|x-7|=2x-10$ et $2x-10=4$ ssi $x=7$.

   On peut donc conclure que l'ensemble des solutions de $|x-3|+|x-7|=4$ est l'intervalle $[3,7]$.
4. On étudie $|x-1|+|x-2|$ sur chacun des intervalles $]-\infty,1]$, $[1,2]$ et $[2,+\infty[$.
   - Pour tout x dans $]-\infty,1]$, on a $|x-1|+|x-2|=-2x+3$.
     Or $-2x+3<1$ ssi $x>1$. Mais on ne cherche que les solutions dans $]-\infty,1]$, donc c'est impossible.
   - Pour tout x dans $[1,2]$, on a : $|x-1|+|x-2|=1$, donc aucun réel de $[1,2]$ n'est solution.
   - Pour tout x dans $[2,+\infty[$, on a : $|x-1|+|x-2|=2x-3$ et $2x-3<1$ ssi $x<1$.
     Aucun réel de $[2,+\infty[$ n'est donc solution de $|x-1|+|x-2|<1$.

   En conclusion, l'ensemble des solutions de $|x-1|+|x-2|<1$ est l'ensemble vide.
   Remarque : on peut aussi tracer la fonction $x\mapsto|x-1|+|x-2|$.

Exercice 15. 1. Pour $a\in\mathbb{R}$, on considère les réels $A=\dfrac{a^4-7a^2+4}{3}$ et $B=\dfrac{a^4-9a^2+5}{4}$. Montrer que l'un de ces deux nombres (on précisera lequel) est toujours plus grand que l'autre.

2. Soit m et n deux réels. Pour $a\in\mathbb{R}$, on considère les réels $C=\dfrac{a^4+ma^2+2}{3}$ et $D=\dfrac{a^4+na^2+3}{4}$. Montrer que le signe de $D-C$ n'est pas constant quand a varie dans $\mathbb{R}$.

Correction

1. On impose la rélation $A \leq B$. Après des calculs simples, on se reconduit à l'inégalité $a^4 - a^2 + 1 \leq 0$. Maintenant, en posant $a^2 = y$, c'est facile à voir que cette inégalité n'est jamais satisfaite (pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $y^2 - y + 1 > 0$). Donc, on en déduit que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $A > B$.
2. On calcule
$$D - C = \frac{1}{12}\left(-a^4 + (3n - 4m)\, a^2 + 1\right) .$$
Maintenant, pour $a = 0$, $D - C = 1/12 > 0$. Pour $a \to +\infty$, par contre, $D - C \to -\infty$, donc le signe de $D - C$ n'est pas constant.

Exercice 16 (Simplification d'intervalles)**.**
Simplifier les intervalles suivants.

1. $[1,5] \cap [2,6[$;
2. $[1,5] \cup [2,6[$;
3. $]-\infty,3] \cap [0,+\infty[$;
4. $]-\infty,3] \cup [0,+\infty[$;
5. $[-2,3[\cup\{3\}$;
6. $[-2,3[\cap\{3\}$;
7. $[1,2] \cap [5,6[$;
8. $[1,2] \cup [5,6[$;
9. $([-6,8] \cup [4,6[) \cap [7,10[$;

Correction

1. $[1,5] \cap [2,6[= [2,5]2$;
2. $[1,5] \cup [2,6[= [1,6[$;
3. $]-\infty,3] \cap [0,+\infty[= [0,3]$;
4. $]-\infty,3] \cup [0,+\infty[= \mathbb{R}$;
5. $[-2,3[\cup\{3\} = [-2,3]$;
6. $[-2,3[\cap\{3\} = \emptyset$;
7. $[1,2] \cap [5,6[= \emptyset$;
8. $[1,2] \cup [5,6[= \{x \in \mathbb{R}, 1 \leq x \leq 2 \text{ ou } 5 \leq x < 6\}$. Ce n'est pas un intervalle ! ;
9. $([-6,8] \cup [4,6[) \cap [7,10[= [-6,8] \cap [7,10[= [7,8]$;

Exercice 17 (Intervalles)**.** Soient $a \leq b$ et $c \leq d$ des réels. On note $I = [a,b]$ et $J = [c,d]$.

1. Montrer que $I \cap J$ est toujours un intervalle.
2. Sous quelle condition $I \cup J$ est-il un intervalle ?
3. Trouver deux parties A et B de $\mathbb{R}$ telles que $A \cap B$ soit un intervalle, sans que ni A, ni B ne soient un intervalle. Même question pour $A \cup B$.
4. Reprendre les questions 1 et 2 avec deux intervalles quelconques I et J.

Correction

Il est vivement conseillé de faire des schéma représentant les intervalles !

1. Soit x un réel. On a $x \in I \cap J$ si et seulement si x vérifie les quatre conditions $a \leq x$, $x \leq b$, $c \leq x$ et $x \leq d$.
   Ce qui équivaut à $x \geq \max(a,c)$ et $x \leq \min(b,d)$.
   On aboutit à deux cas :
   — Si $\max(a,c) > \min(b,d)$, ce qui est le cas si $b < c$ ou si $d < a$, alors $I \cap J$ est l'ensemble vide donc c'est un intervalle $]a,a[$.
   — Sinon, on a $I \cap J = [\max(a,c), \min(b,d)]$, qui est bien un intervalle.
   On peut conclure que $I \cap J$ est toujours un intervalle (éventuellement vide).
2. $I \cup J$ est un intervalle si et seulement si $I \cap J$ est non vide.
   En effet, supposons par exemple $a \leq c$.
   On peut distinguer trois cas suivant les positions respectives de b, c et d.
   — Si $b < c \leq d$: alors tout réel x de $]b,c[$ n'appartient pas à $I \cup J$. On constate donc que $I \cup J$ n'est pas un intervalle et que $I \cap J$ est vide.
   — Si $c \leq b \leq d$: alors tout réel de l'intervalle $[a,d]$ est soit compris entre a et b, soit compris entre c et d. On a donc $I \cup J = [a,d]$ et $I \cap J$ est effectivement non vide.
   — Si $a \leq c \leq d < b$: alors $I \cup J = [a,b]$ et $I \cap J = [c,d]$ est non vide.

3. Par exemple, on choisit $A = [0, 1] \cup 10$ et $B = [0, 1] \cup 12$. Alors A et B ne sont pas des intervalles et $A \cap B = [0, 1]$ est un intervalle.
   Avec $C = [0, 1] \cup \mathbb{Q}$ et $D = [0, 1] \backslash C$, on a un exemple de deux parties qui ne sont aps des intervalles et dont la réunion forme un intervalle.

Exercice 18 (Majorant)**.**

1. Rappeler la définition d'une partie A majorée de $\mathbb{R}$.
2. Quels sont les majorants de $[0, 1]$? De $[0, 1[$?
3. Donner un exemple de partie non majorée de $\mathbb{R}$.
4. On se donne deux parties majorées A et B de $\mathbb{R}$. Le majorant de $A \cup B$ est-il un majorant de A et de B ? Que peut-on dire d'un majorant de $A \cap B$?

Correction

1. Une partie A de $\mathbb{R}$ est majorée s'il existe un réel M tel que, pour tout x dans A, on ait $x \leq M$.
2. Les majorants de $[0, 1]$ sont tous les réels supérieux ou égaux à 1, donc tous les réels de l'intervalle $[1, +\infty[$.
   Les majorants de $[0, 1[$ sont également tous les réels de $[1, +\infty[$.
3. $\mathbb{R}^+$ est une partie de $\mathbb{R}$ non majorée. On peut penser par exemple aussi à $\mathbb{N}$, ou à $\{n^2, n \in \mathbb{N}\}$.
4. C'est vrai : soit M un majorant de $A \cup B$.
   Pour tout $x \in A$, on a $x \in A \cup B$, donc $x \leq M$: le réel M est donc bien un majorant de A.
   On peut montrer de même qu'il est un majorant de B.
   On ne peut rien dire sur les majorants de A ou B à partir d'un majorant de $A \cap B$. On peut simplement montrer que si $A \cap B$ n'est pas majoré, alors ni A, ni B ne sont majorés.

Exercice 19 (Maximum)**.**

1. Rappeler la définition du maximum d'une partie de $\mathbb{R}$.
2. Une partie de $\mathbb{R}$ peut-elle admettre plusieurs maximums (distincts) ?
3. Montrer que toute partie A de $\mathbb{R}$ admettant un maximum est majorée.
4. Écrire une assertion exprimant qu'une partie A de $\mathbb{R}$ n'admet pas de maximum.
5. Si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$ admettant un maximum, est-ce que $A \cap B$ et $A \cup B$ admettent des maximums ?

Correction

1. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Un réel M est le maximum de A si M appartient à A et si M est un majorant de A.
2. Le maximum d'une partie A de $\mathbb{R}$, s'il existe, est unique.
   Considérons deux maximums M_1 et M_2 de A.
   Alors, par définition du maximum : M_2 étant le maximum de A, on a M_2 appartient à A, et donc M_1, qui est un maximum de A, lui est supérieur : $M_1 \geq M_2$.
   De même, $M_2 \geq M_1$.
   On peut alors conclure que $M_1 = M_2$: le maximum, s'il existe, est unique.
3. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ admettant un maximum, que l'on note M. Alors, par définition du maximum, pour tout $x \in A$, on a $x \leq M$, donc M est un majorant de A.
   Toute partie de $\mathbb{R}$ qui admet un maximum est donc majorée.
4. Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
   A n'admet pas de maximum si, pour tout $x \in A$, il existe un réel y de A tel que $y > x$.
5. Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ admettant un maximum que l'on note M_A (resp. M_B).
   On considère $K = \max(M_A, M_B)$. Alors, K appartient à $A \cup B$, et tout élément de A (resp. de B) est inférieur ou égal à K. Donc K est un majorant de $A \cup B$.
   On peut donc conclure que K est le maximum de $A \cup B$.

En ce qui concerne $A \cap B$: le même réel K est un majorant de $A \cap B$, mais il n'a aucune raison d'être son maximum.

On peut trouver des contrexemples pour lesquels A et B admettent un maximum et $A \cap B$ n'es admet pas. Il suffit par exemple de choisir deux intervalles fermés bornés et disjoints. L'ensemble vide n'admet pas de maximum.

Ou alors : $A = [0,1[\cup\{2\}$ et $B = [0,1[\cup\{3\}$. Alors : 2 est le maximum de A, et 3 est celui de B mais $A \cap B = [0,1[$ n'admet pas de maximum.

Exercice 20 (Majorant, minorant, borne supérieure, borne inférieure, maximum, minimum)**.**

Pour les ensembles suivants, dire s'ils sont majorés, minorés, et s'ils admettent une borne supérieure, une borne inférieure, un maximum et un minimum.

1. $A = \{4, -5, 10, -9, 21, 0, -3\}$;
2. $B = [-1, 3]$;
3. $C = [0, +\infty[$;
4. $D =]0, +\infty[$;
5. $E = \left\{x \in \mathbb{R},\, x^2 < 4\right\}$;
6. $F = \{n \in \mathbb{N},\, 4 \leq 2^n \leq 1024\}$;
7. $G = \left\{x \in \mathbb{R}^*,\, \dfrac{1}{x} \geq 2\right\}$;
8. $H = \left\{\dfrac{1}{n},\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

__Correction__

1. $A = \{4, -5, 10, -9, 21, 0, -3\}$ est majoré et minoré, admet un maximum (21), un minimum (-9) (donc une borne sup et une borne inf).
2. $B = [-1, 3]$ est majoré, minoré, admet un maximum (3) et un minimum (-1), (donc une borne sup est une borne inf) ;
3. $C = [0, +\infty[$ est minoré, admet une borne inf qui est aussi son minimum. N'est pas majoré, n'admet pas de maximum, ni de borne sup. ;
4. $D =]0, +\infty[$ est minoré, admet une borne inf (0) mais pas de minimum. N'est pas majoré, n'admet pas de maximum, ni de borne sup.
5. $E = \left\{x \in \mathbb{R},\, x^2 < 4\right\}$ est l'intervalle $]2, 2[$: il est majoré, minoré, admet une borne sup (2) et une borne inf (-2), mais pas de maximum, ni de minimum.
6. $F = \{n \in \mathbb{N},\, 4 \leq 2^n \leq 1024\}$ est l'ensemble $\{2, \ldots, 10\}$. Il est minoré et majoré, admet une borne inf et un minimum (2), une borne sup et un maximum (10).
7. $G = \left\{x \in \mathbb{R}^*,\, \dfrac{1}{x} \geq 2\right\}$ est l'ensemble $\mathbb{R}^{-*}\cup]0, 1/2[$. Il n'est pas minoré, n'admet ni borne inf, ni minimum. Il est majoré, admet une borne sup (1/2) mais pas de maximum.
8. $H = \left\{\dfrac{1}{n},\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ admet un pour maximum (donc borne sup aussi) et est majoré. Il est minoré, admet une borne inf (0) mais pas de minimum.