Université Claude Bernard Lyon 1 UE Analyse 1 pour les informaticiens

Semestre d'automne 2022-2023

**Contrôle partiel n°1 – Durée 1 heure – lundi 3 octobre 2022**
**CORRECTION**

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.

---

**Exercice 1. Calculs avec des réels. (2+2+1=5 points)**

Simplifier et calculer les expressions suivantes :

1. $A = \dfrac{9^4 \cdot 2^3}{6^6 \cdot 3^2}$
2. $B = \dfrac{\sqrt{2}\sqrt[3]{3}\sqrt[4]{4}\sqrt[6]{6}}{\sqrt{12}}$
3. $C = \left((-2)^2\right)^{-2} + \left(2^{-2}\right)^2$

**Correction.**

1. $A = \dfrac{9^4 \cdot 2^3}{6^6 \cdot 3^2} = \dfrac{(3^2)^4 \cdot 2^3}{2^6 \cdot 3^6 \cdot 3^2} = 3^{8-6-2} \cdot 2^{3-6} = 2^{-3} = \dfrac{1}{8}$.
2. $B = \dfrac{\sqrt{2}\sqrt[3]{3}\sqrt[4]{4}\sqrt[6]{6}}{\sqrt{12}} = \dfrac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{4}} \cdot 6^{\frac{1}{6}}}{2 \cdot 3^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{6}} \cdot 3^{\frac{1}{6}}}{2 \cdot 3^{\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-1} \cdot 3^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{6}}$
3. $C = \left((-2)^2\right)^{-2} + \left(2^{-2}\right)^2 = 2^{-4} + 2^{-4} = 2 \cdot 2^{-4} = 2^{-3} = \dfrac{1}{8}$

---

**Exercice 2. Inégalités et polynômes. (5 points)**

1. Déterminer l'ensemble des réels $x$ qui vérifient :
$$x^2 - 3x + 2 \geq 0.$$
2. Déterminer l'ensemble des réels $x$ qui vérifient :
$$x^2 + 5x + 7 > (x+1)^2.$$

**Correction.**

1. Le discriminant du trinôme est $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 > 0$, donc ce trinôme admet deux racines distinctes
$$x_1 = \frac{3+1}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3-1}{2} = 1.$$
Le coefficient du terme de plus haut degré étant positif, on en déduit que l'ensemble des solutions de cette inéquation est $]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$.
2. On développe et on obtient que
$$x^2 + 5x + 7 > (x+1)^2 \iff x^2 + 5x + 7 > x^2 + 2x + 1 \iff 3x > -6 \iff x > -2.$$
L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc $]-2, +\infty[$.

**Exercice 3. Inégalités et valeurs absolues. (5 points)**
Déterminer l'ensemble des réels $x$ qui vérifient :

$$|x(x+2)| = 8$$

puis

$$|x(x+2)| \leq 8.$$

**Correction.** La première équation s'écrit aussi $x(x+2) = 8$ ou $x(x+2) = -8$. La première équation se résout de la façon suivante :

$$x(x+2) = 8 \iff x^2 + 2x - 8 = 0.$$

Le trinôme a pour discriminant $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 36 > 0$ et admet ainsi deux racines distinctes

$$x_1 = \frac{-2+6}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2-6}{2} = -4.$$

La deuxième équation se résout de la façon suivante

$$x(x+2) = -8 \iff x^2 + 2x + 8 = 0,$$

pour laquelle le trinôme a pour discriminant $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = -28 < 0$, et l'équation n'admet pas de solution.
On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation $|x(x+2)| = 8$ est $\{-4, 2\}$.

Pour résoudre l'inéquation $|x(x+2)| \leq 8$, on raisonne sur le signe de $x(x+2)$ dans $\mathbb{R}$. Les racines de ce polynôme du second degré sont 0 (annulant $x$) et $-2$ (annulant $x+2$). On en déduit que :

— si $x \in [-2, 0]$, alors $x(x+2) \leq 0$ et l'inéquation s'écrit donc

$$-x(x+2) \leq 8 \iff -x^2 - 2x - 8 \leq 0 \iff x^2 + 2x + 8 \geq 0.$$

D'après la question précédente, on sait que le trinôme $x^2 + 2x + 8$ n'admet pas de racine, ce qui implique ici que $x^2 + 2x + 8 > 0$ pour tout réel $x \in [-2, 0]$, c'est-à-dire que l'inégalité est toujours vraie dans cet intervalle.

— si $x \in ]-\infty, -2[ \cup ]0, +\infty[$, alors $x(x+2) \geq 0$ et l'inéquation s'écrit donc

$$x(x+2) \leq 8 \iff x^2 + 2x - 8 \leq 0.$$

D'après la question précédente, on sait que le trinôme $x^2 + 2x - 8$ admet deux racines distinctes 2 et $-4$. On en déduit donc que l'inégalité est vérifiée si

$$x \in [-4, 2] \cap (]-\infty, -2[ \cup ]0, +\infty[) = [-4, -2[ \cup ]0, 2].$$

Finalement, on conclut que l'ensemble des solutions de l'inéquation $|x(x+2)| \leq 8$ est $[-4, 2]$.

---

**Exercice 4. Inégalités et fractions. (5 points)**

Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que les deux membres de l'inégalité suivante soient bien définis et l'inégalité soit satisfaite.

$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{x-4}{x-1}$$

**Correction.** L'inégalité est bien définie si $x + 1 \neq 0$ et $x - 1 \neq 0$, c'est-à-dire pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \{-1, 1\}$.

Ainsi, pour tout $x$ dans cet ensemble, on a les équivalences suivantes

$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{x-4}{x-1} \iff 0 \leq \frac{x-4}{x-1} - \frac{1}{x+1} \iff 0 \leq \frac{(x-4)(x+1)-(x-1)}{(x-1)(x+1)} \iff 0 \leq \frac{x^2-4x-3}{(x-1)(x+1)}.$$

Le trinôme $x^2-4x-3$ a pour discriminant $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 28 > 0$ et admet donc deux racines distinctes

$$x_1 = \frac{4+2\sqrt{7}}{2} = 2+\sqrt{7} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{4-2\sqrt{7}}{2} = 2-\sqrt{7}.$$

On a donc $x^2-4x-3 \leq 0 \iff x \in \left[2-\sqrt{7}, 2+\sqrt{7}\right]$.
On a aussi $x-1>0 \iff x>1$ et $x+1>0 \iff x>-1$. Un tableau de signes (non fait ici) permet ensuite de déduire que l'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{1}{x+1} \leq \frac{x-4}{x-1}$ est

$$]-\infty, -1[\cup[2-\sqrt{7}, 1[\cup[2+\sqrt{7}, +\infty[.$$

---

**Exercice 5. Question de cours. (3 points)**

Soit $I$ et $J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow J$ une fonction.
Donner la définition de «$f$ est croissante».

**Correction.** $f$ est croissante si et seulement si

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$