Contrôle Terminal du 12 janvier 2023 – Durée 2 heures

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.

Exercice 1 — Limites et continuité
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ \cosh(x) & \text{si } x \in [0,1] \\ \arctan(x) - \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Etudier la continuité de f en 1.
3. En déduire l'ensemble maximal (au sens de l'inclusion) sur lequel f est continue.
4. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

Exercice 2 — Étude d'une fonction
On considère la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie pour $x > 0$ par $f(x) = 2x\ln(x) + \ln(2)$.

1. Pourquoi f est-elle dérivable ?
2. Calculer, pour $x > 0$, la valeur de $f'(x)$. Déterminer son signe en fonction de x.
3. Montrer que f atteint son minimum en $x_0 = 1/e$.
4. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
5. Calculer $f(1/2)$ et $f(1/4)$.
6. Montrer que la fonction f restreinte à $]0, x_0]$ est injective. On admettra sans preuve que la fonction f restreinte à $[x_0, +\infty[$ est injective.
7. Déterminer l'ensemble des $x > 0$ qui sont solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 3 — Suites réelles
On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par $u_1 = 0$, $v_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{v_n - u_n}{2n+2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = v_n - \frac{v_n - u_n}{2n+2}.$$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < v_n$.
2. En déduire la monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent.
4. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,
$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_1 - u_1}{n+1}$$
et en déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
5. Déterminer la limite des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Indication : on pourra calculer $v_{n+1} + u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4 — Étude d'une fonction

On cherche à étudier la fonction
$$f(x) = \ln(\sin^2(x))$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer si la fonction f est paire ou impaire.
3. Montrer que la fonction f est 2π-périodique. Est-elle π-périodique ?
4. Déterminer la limite à gauche et la limite à droite de la fonction f en 0.
5. Donner la table de variations de f sur $]0, \pi[$.
6. Tracer le graphe de f en indiquant ses asymptotes.