Université Claude Bernard Lyon 1 UE Analyse 1 pour informaticiens
Semestre d'automne 2022-2023

Contrôle Terminal du 12 janvier 2023 – Durée 2 heures

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.

Exercice 1 — Limites et continuité

1. La fonction cosh est continue sur $\mathbb{R}$, donc sa restriction à $[0,1]$ est continue. Ainsi f est continue à droite en 0 et on a $f(0) = \cosh(0) = 1$. Par ailleurs, en écrivant le taux d'accroissement de la fonction sin, on a
$$\lim_{x\to 0, x\neq 0} \frac{\sin(x)}{x} = \sin'(0) = 1.$$
on a donc $\lim_{x\to 0, x<0} f(x) = 1 = f(0)$ et f est donc continue à gauche en 0, donc continue en 0.
2. On a, puisque la fonction arctan est continue,
$$\lim_{x\to 1, x>1} f(x) = \lim_{x\to 1, x>1} \arctan(x) - \frac{\sqrt{2}}{2} = \arctan(1) - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$
Puisuqe $\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 < f(1) = \cosh(1)$, f n'est pas continue à droite en 1, donc pas continue en 1.
3. En restriction à chacun des intervalles ouverts $]-\infty, 0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$, la fonction f coïncide avec une fonction usuelle et donc est continue. Puisque f est continue en 0 et non continue en 1, on en déduit que l'ensemble maximal sur lequel f est continue est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
4. On a $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$. Puisque l'on a l'encadrement pour $x < 0$
$$\frac{1}{x} \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant \frac{-1}{x}$$
(attention à l'ordre, x est négatif !) et que les fonctions $x \mapsto 1/x$ et $x \mapsto -1/x$ tendent vers 0 en $-\infty$, le théorème des gendarmes pour les fonctions implique que f a pour limite 0 en $-\infty$.

Exercice 2 — Étude d'une fonction
On considère la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie pour $x > 0$ par $f(x) = 2x\ln(x) + \ln(2)$.

1. La fonction f est dérivable comme somme et produit de fonctions usuelles.
2. On calcule $f'(x) = 2x\frac{1}{x} + 2\ln(x) = 2(1 + \ln(x))$. On en déduit que $f'(x) < 0$ si $x < 1/e$, que $f'(x) = 0$ si $x = 1/e$ et que $f'(x) > 0$ si $x > 1/e$.
3. Il découle de la question précédente que f est décroissante sur $]0, x_0]$ et croissante sur $[x_0, +\infty[$. Par conséquent, f atteint son minimum en x_0.
4. On a par croissances comparées $\lim_{x\to 0, x>0} x\ln(x) = 0$ et donc f a pour limite $\ln(2)$ en 0. Par ailleurs, puisque $\lim_{x\to\infty} 2x = \lim_{x\to\infty} \ln(x)$, on en déduit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.
5. On a $f(1/2) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln(1/2) + \ln(2) = -\ln(2) + \ln(2) = 0$ et $f(1/4) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \ln(1/4) + \ln(2) = -\frac{\ln(4)}{2} + \ln(2) = -\ln(2) + \ln(2) = 0$
6. La fonction f est strictement décroissante sur $]0, x_0]$ (puisque sa dérivée est < 0 sur $]0, x_0[$) donc injective en restricion à $]0, x_0]$.
7. En restriction à chacun des intervalles $]0, x_0]$ et $[x_0, \infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet au plus une solution par la question précédente. Or on a identifié deux solutions à la question 5 (une dans chaque intervalle : $1/4 < x_0 < 1/2$ puisque $2 < e < 4$). L'ensemble des solutions est donc $\{1/4, 1/2\}$.

Exercice 3 — Suites réelles

Il y avait une erreur dans le sujet. Avec la formule donnée, on a $u_1 = v_1 = 1/2$ et donc $u_n = v_n = 1/2$ pour tout $n \geqslant 1$. Ceci fait que la question 1. est fausse et qu'il est très facile de répondre aux questions 2 à 5 : la suite (u_n) est croissante, la suite (v_n) est décroissante, les deux suites convergent vers $1/2$ et elles sont bien adjacentes. Les quelques étudiants qui ont remarqué cela ont bien évidemment été crédités de tous les points de l'exercice.

L'énoncé que j'avais en tête utilisait des suites indexées par $\mathbb{N}^*$, tel que ci-dessous. Pour la plupart des élèves, cela ne change presque rien.

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par $u_1 = 0$, $v_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{v_n - u_n}{2n+2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = v_n - \frac{v_n - u_n}{2n+2}.$$

1. *Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < v_n$.*
2. *En déduire la monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.*
3. *Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent.*
4. *Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,*
$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_1 - u_1}{n+1}$$
et en déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
5. *Déterminer la limite des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.*
Indication : on pourra calculer $v_{n+1} + u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour un entier $n > 0$, notons P_n la propriété "$u_n < v_n$" et montrons par récurrence qu'elle est vraie. La propriété P_1 est vraie puisque $u_1 = 0 < 1 = v_1$. Supposons la propriété P_n vraie pour un entier $n \geqslant 1$. Alors
$$v_{n+1} - u_{n+1} = v_n - \frac{v_n - u_n}{2n+2} - \left(u_n + \frac{v_n - u_n}{2n+2}\right) = (v_n - u_n)\frac{2n+2-2}{2n+2} > 0$$
et donc P_{n+1} est vraie, ce qui termine la récurrence.
2. Pour tout entier $n > 0$, on a $u_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2n+2} > 0$ d'après la question précédente, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. De même, $v_{n+1} - v_n = -\frac{v_n - u_n}{2n+2} < 0$ donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
3. On a pour tout entier $n > 0$ l'inégalité $u_1 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_1$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 1 et croissante, donc convergente. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par 0 et décroissante, donc convergente.
4. Soit Q_n la propriété "$v_n - u_n = \frac{v_1 - u_1}{n}$". La proriété Q_1 est vraie. Si on suppose Q_n vraie pour un entier $n \geqslant 1$, l'équation $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{n}{n+1}(v_n - u_n)$ obtenue à la question 1 implique que
$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{n}{n+1}\frac{v_1 - u_1}{n} = \frac{v_1 - u_1}{n+1}$$
et donc Q_{n+1} est vraie, ce qui termine la récurrence. On obtient alors que $\lim(v_n - u_n) = 0$, donc $\lim u_n = \lim v_n$.
5. On a pour tout entier n la relation $u_{n+1} + v_{n+1} = u_n + v_n$, donc la suite $(u_n + v_n)$ est constante égale à $u_1 + v_1 = 1$. Si on pose $\ell = \lim u_n = \lim v_n$, on a donc $\ell + \ell = 1$ et donc $\ell = 1/2$.

Exercice 4 — Étude d'une fonction

1. Le nombre $f(x)$ est défini lorsque $\sin x \neq 0$, c'est-à-dire pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$. Le domaine de définition de f est donc $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.
2. La fonction f est paire puisque la fonction $\sin^2$ est paire.

3. La fonction f est 2π-périodique car la fonction sin l'est. Elle est aussi π périodique puisque $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ pour tout x réel.
4. Les limites à gauche et la limites à droite de la fonction f en 0 sont égales à $-\infty$, puisque dans les deux cas $\sin(x)^2$ tend vers 0 par valeurs supérieures, et $\lim_{x \to 0, x>0} \ln(x) = -\infty$.
5. La fonction f est dérivable sur $]0, \pi[$ comme composée de fonctions usuelles, et sa dérivée pour $x \in]0, \pi[$ est $f'(x) = \frac{2\cos(x)}{\sin x}$, qui du même signe que $\cos(x)$. On en déduit que f est croissante sur $]0, \pi/2]$ et décroissante sur $[\pi/2, \pi[$.
6. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la droite d'équation $x = k\pi$ est une asymptote verticale. Voici l'allure du graphe.