Université Claude Bernard Lyon 1 UE Analyse 1 pour les informaticiens

Semestre d'automne 2022-2023

Contrôle partiel n°2 – Durée 1 heure – lundi 21 novembre 2022
CORRECTION

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.

Exercice 1. Dérivation (4 points)

Pour chacune des fonctions suivantes, préciser son domaine de définition et calculer sa dérivée.

$$f(x) = 3x\exp(x^2 - x),$$
$$g(x) = \ln(\sin^2 x),$$

Correction.
• La fonction f donnée par $f(x) = 3xe^{x^2-x}$ est clairement définie sur $\mathbb{R}$ et

$f'(x) = 3e^{x^2-x} + 3x(2x-1)e^{x^2-x} = 3(2x^2 - x + 1)e^{x^2-x}$.
• La fonction g donnée par $g(x) = \ln(\sin^2 x) = \ln(|\sin x|^2) = 2\ln(|\sin x|)$ est définie pour tout x tel que $|\sin x| \neq 0$, c'est-à-dire si $\sin(x) \neq 0$, autrement dit $x \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. De plus,
$g'(x) = 2\frac{\cos x}{\sin x} = 2 \text{ cotan } x$.

Exercice 2. Une suite (4 points)

On définit une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par récurrence en posant $u_0 = 0$, et pour tout entier n,

$$u_{n+1} = \frac{1 + 2u_n}{2 + u_n}.$$

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 < u_n \leq 1$. (Si vous faites un raisonnement par récurrence, faites particulièrement attention à le rédiger proprement.)

Correction. On montre la propriété par récurrence sur $n \geq 1$.

Avant tout, calculons u_1 : par définition, on trouve

$$u_1 = 1/2 \qquad \Longrightarrow \qquad 0 < u_1 \leq 1\,.$$

Maintenant, supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, on a $0 < u_n \leq 1$. Alors, par définition, on voit tout de suite que $u_{n+1} > 0$ aussi, car il est un quotient de quantités positives.
Pour prouver la deuxième inégalité, remarquons que

$$u_{n+1} = \frac{1 + 2u_n}{2 + u_n} = \frac{1 + u_n + u_n}{2 + u_n} \leq \frac{2 + u_n}{2 + u_n} = 1\,,$$

car $u_n \leq 1$ par hypothèse de récurrence. L'inégalité $u_{n+1} \leq 1$ est donc vérifiée aussi au rang $n+1$.
En conclusion, la propriété $0 < u_n \leq 1$ est initialisée au rang $n = 1$ et est héréditaire. Par le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Exercice 3. Suite arithmético-géométrique (5 points)
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = 4u_n - 3.$$

1. Calculer u_n pour tout entier n.
2. Est-ce que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge ?

Correction.

1. Cherchons $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = 4\alpha - 3$.
   $\alpha = 4\alpha - 3 \Leftrightarrow 3\alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha = 1$.
   Posons $v_n := u_n - \alpha$.
   On a :
   $u_{n+1} = 4u_n - 3$ (i)
   $\alpha = 4\alpha - 3$ (ii)
   $(i) - (ii) \Rightarrow u_{n+1} - \alpha = 4(u_n - \alpha) \Rightarrow v_{n+1} = 4v_n$.
   Ainsi $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison 4. Par suite $v_n = v_0 \times 4^n$.
   $v_0 := u_0 - \alpha = 2 - 1 = 1$.
   $v_n = 4^n$.
   $v_n = u_n - \alpha \Rightarrow u_n = v_n + \alpha = 4^n + 1$.
   Ainsi $u_n = 1 + 4^n$ pour tout entier n.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} 4^n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$. Ainsi la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ ne converge pas.

Exercice 4. Questions de cours (3 points)

1. Donner la définition de la convergence d'une suite.
2. Donner la définition de la fonction sinh (sinus hyperbolique).
3. Donner la définition de la fonction arccos (arc cosinus).

Correction.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que la suite $(u_n)_n$ est convergente et que sa limite est ℓ si

$$\forall\, \varepsilon > 0\,, \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \;\Big|\; \quad \forall\, n \geq N\,, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon\,.$$

2. La fonction sinh est définie par la formule

$$\begin{aligned} \sinh\, :\; \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{2}\Big(e^x - e^{-x}\Big)\,. \end{aligned}$$

3. La fonction arccos est la bijection réciproque de la fonction $x \mapsto \cos(x)$, qui est une bijection de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$. On a donc

$$\begin{aligned} \arccos\, :\; [-1,1] &\longrightarrow [0,\pi] \\ x &\mapsto \arccos(x) = y \quad \text{tel que} \quad \cos(y) = x\,. \end{aligned}$$

Exercice 5. Trigonométrie (5 points)

Résoudre l'équation suivante :

$$\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{2}.$$

Correction.

$\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{2}$.

$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
$\cos\frac{\pi}{6}\sin(x) + \sin\frac{\pi}{6}\cos(x) = \sin\frac{\pi}{4}$.
$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4}$
$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ ou $x + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
$x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$ ou $x = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
L'ensemble des solutions est

$$S = \left\{ \frac{\pi}{12} + 2k\pi, \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \ : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$