

## Correction Feuille 3 : Suites réelles

### Exercice 1

$$1. u_n = \frac{n+2}{2n-1} = \frac{n(1+\frac{2}{n})}{n(2-\frac{1}{n})} = \frac{1+\frac{2}{n}}{2-\frac{1}{n}}.$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right) = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$ .

$$2. u_n = \frac{3n^2 - 2n + 3}{n^3 - 1} = \frac{n^2(3 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2})}{n^3(1 - \frac{1}{n^3})} = \frac{1}{n} \cdot \frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^3}}.$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^3}} = 3$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

$$3. u_n = \frac{3n^2 - 5}{n+4} = \frac{n^2(3 - \frac{5}{n^2})}{n(1 + \frac{4}{n})} = n \cdot \frac{3 - \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{4}{n}}.$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{4}{n}} = 3$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

$$4. u_n = \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{n(1+\frac{2}{n})}}{\sqrt{n(1-\frac{1}{n})}} = \frac{\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{\sqrt{n}\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}.$$

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{1} = 1$ .

$$5. u_n = \frac{\sqrt{n+5} + n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n(1 + \frac{\sqrt{n+5}}{n})}{\sqrt{n^2(1 + \frac{1}{n^2})}} = \frac{n(1 + \sqrt{\frac{n+5}{n^2}})}{\sqrt{n^2}\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}.$$

$$n = \sqrt{n^2} \text{ car } n \text{ est positif, donc } u_n = \frac{n(1 + \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}})}{n\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{1 + \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}.$$

On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1+0}{1} = 1$ .

$$6. u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

7. Par l'absurde, supposons que la suite  $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$  admet une limite  $\ell_1$ . On a la formule de trigonométrie suivante  $\sin(n+1) = \sin(n)\cos(1) + \cos(n)\sin(1)$ .

Donc  $\cos(n) = \frac{\sin(n+1) - \sin(n)\cos(1)}{\sin(1)}$  car  $\sin(1) \neq 0$ .

En particulier, la suite  $(\cos(n))_n$  converge vers  $\ell_2 := \frac{\ell_1 - \ell_1 \cos 1}{\sin(1)}$ . On en déduit que la suite  $(e^{in})_n$  converge vers  $\lambda := \ell_2 + i\ell_1$ .

Or  $e^{i(n+1)} = e^{in}e^i$  et quand on prend la limite on a  $\lambda = \lambda e^i$ . Donc  $\lambda = 0$ .

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{in} = 0$ . Par suite,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |e^{in}| = 0$ . C'est absurde car  $|e^{in}| = 1$ .

En conclusion  $(\sin(n))_n$  n'a pas de limite.

$$8. \text{ On a } -1 \leq \sin(n) \leq 1, \text{ donc } \frac{-1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} \leq \frac{+1}{\sqrt{n}}.$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{+1}{\sqrt{n}} = 0$ . Par le théorème des gendarmes, on en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} = 0$ .

9. On a  $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$ .

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$ . On a posé  $h = \frac{1}{n}$ .

Par suite,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^1 = e$ .

10.  $u_n = \frac{n - (-1)^n}{2n + (-1)^n} = \frac{n(1 - \frac{(-1)^n}{n})}{n(2 + \frac{(-1)^n}{n})} = \frac{1 - \frac{(-1)^n}{n}}{2 + \frac{(-1)^n}{n}}$ .

$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = 0$ , par suite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ .

Ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$ .

11. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_{2n} = 1$  et  $u_{2n+1} = -1$ , donc la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas.

12.  $u_n = \frac{3^n - 2^n}{2^n - 3^n} = (-1) \frac{3^n - 2^n}{3^n - 2^n} = -1$ . Donc  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est la suite constante égale à  $-1$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$ .

13.  $u_n = \frac{2^n}{n^{100}} = \frac{\exp(n \ln(2))}{\exp(100 \ln(n))} = \exp(n \ln(2) - 100 \ln(n)) = \exp\left(n \left(\ln(2) - 100 \frac{\ln(n)}{n}\right)\right)$ . Or on sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(2) - 100 \frac{\ln(n)}{n} = \ln(2) > 0$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

14.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \cos 0 = 1$ .

15. On a  $|u_n| \leq \frac{1}{n}$ . Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0$ . Par suite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

16. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_{4n} = \cos(2n\pi) = 1$  et  $u_{4n+1} = \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{4n} = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{4n} = 0 \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{4n}$ . Ainsi  $u_n$  n'a pas de limite.

**Exercice 2.**  $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}$ .

1. Montrons que la suite  $(u_n)$  est croissante :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(\frac{1}{(n+1)+1} + \frac{1}{(n+1)+2} + \dots + \frac{1}{2(n+1)}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{2(n+1) + 2n+1 - 2(2n+1)}{(2n+1)2(n+1)} \\ &= \frac{2n+2 + 2n+1 - 4n-2}{(2n+1)2(n+1)} \\ &= \frac{1}{(2n+1)2(n+1)} \end{aligned}$$

Donc  $u_{n+1} - u_n > 0$ , par suite  $u_{n+1} > u_n$ . On en déduit que la suite  $(u_n)$  est croissante.

2. Dans la définition de  $(u_n)$ , on remarque que le terme le plus grand est  $\frac{1}{n+1}$  et le terme le plus petit est  $\frac{1}{2n}$ . De plus,  $u_n$  est défini comme la somme de  $n$  termes. On en déduit l'encadrement

$$\begin{aligned} n \left( \frac{1}{2n} \right) &< u_n < n \left( \frac{1}{n+1} \right) \\ \frac{1}{2} < u_n &< \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n} < 1 \end{aligned}$$

Donc  $\frac{1}{2} < u_n < 1$ . Comme la suite est croissante et majorée (par 1), elle converge par le théorème de la convergence monotone vers une limite  $\ell$ , et cette limite vérifie  $\frac{1}{2} \leq \ell \leq 1$ .

3. Soit la suite  $v_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  définie pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . Par l'absurde, supposons que  $(v_n)$  converge vers  $\mu$ . On a  $v_{2n} = v_n + u_n$ . En prenant la limite on obtient  $\mu = \mu + \ell$ . D'où  $\ell = 0$ . C'est impossible vu l'encadrement de  $\ell$  dans la question 2. On en déduit que  $(v_n)$  n'a pas de limite finie. Comme elle est croissante alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty$ .

**Exercice 3.**  $u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + 3$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1.  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite arithmético-géométrique car elle est de la forme  $u_n = au_{n-1} + b$  avec  $b$  et  $c$  constantes.

2.  $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 3 \iff \frac{1}{2}\alpha = 3 \iff \alpha = 6$ .

3. On retranche membre à membre les égalités  $u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + 3$  et  $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 3$ . On obtient  $u_n - \alpha = \frac{1}{2}(u_{n-1} - \alpha)$ . Ainsi  $v_n = \frac{1}{2}v_{n-1}$ .

4.  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  et de premier terme  $v_0 = u_0 - 6 = 8 - 6 = 2$ .

Par suite  $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n v_0 = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{n-1}}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

4.  $v_n = u_n - \alpha = u_n - 6$ . Donc  $u_n = v_n + 6 = \frac{1}{2^{n-1}} + 6$ .

On en déduit  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 6$ .

**Exercice 4.** ,  $u_0 = 1$  ,  $u_{n+1} = \frac{u_n + 8}{2u_n + 1}$  ,  $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$ .

1.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 2} = \left( \frac{u_n + 8}{2u_n + 1} - 2 \right) \times \frac{1}{\frac{u_n + 8}{2u_n + 1} + 2} \\ &= \frac{u_n + 8 - 2(2u_n + 1)}{u_n + 8 + 2(2u_n + 1)} \\ &= \frac{-3u_n + 6}{5u_n + 10} \\ &= \frac{-3}{5} \times \frac{u_n - 2}{u_n + 2} \\ &= -\frac{3}{5}v_n \end{aligned}$$

Donc  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $-\frac{3}{5}$  et de premier terme  $v_0 = \frac{u_0 - 2}{u_0 + 2} = -\frac{1}{3}$ .

2. On déduit que  $v_n = \left(-\frac{3}{5}\right)^n v_0 = -\frac{1}{3} \left(-\frac{3}{5}\right)^n$ .

3. Comme  $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$  alors  $v_n(u_n + 2) = u_n - 2$  donc  $u_n(v_n - 1) = -2(v_n + 1)$  et ainsi  $u_n = \frac{-2(v_n + 1)}{v_n - 1}$ . On en déduit  $u_n = -\frac{2[-\frac{1}{3}(-\frac{3}{5})^n + 1]}{-\frac{1}{3}(-\frac{3}{5})^n - 1} = 2 \cdot \frac{3 - (-\frac{3}{5})^n}{3 + (-\frac{3}{5})^n}$ .

4. Comme  $-1 < -\frac{3}{5} < 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3}{5}\right)^n = 0$ . On en déduit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$ .

**Exercice 5.**  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1} \forall n \in \mathbb{N}$ .

1. Par récurrence, posons  $P_n$  : " $u_n > 1$ ".

*Initialisation* : Pour  $n = 0$  on a bien  $u_0 = 2 > 1$ . Donc  $P_0$  est vraie.

*Hérédité* : Soit  $n \in \mathbb{N}$  et supposons  $P_n$  vraie, montrons  $P_{n+1}$  est vraie. On a  $u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$  donc par hypothèse de récurrence  $u_{n+1} > \sqrt{2 \times 1 - 1} = 1$ . Ainsi  $u_{n+1} > 1$ . Donc  $P_{n+1}$  est vraie. Ainsi  $P_n$  est héréditaire.

*Conclusion* : Comme  $P_0$  est vraie et que  $P_n$  est héréditaire alors  $P_n$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Donc  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée par 1.

2. On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{2u_n - 1} - u_n = \frac{(\sqrt{2u_n - 1} - u_n)(\sqrt{2u_n + 1} + u_n)}{\sqrt{2u_n + 1} + u_n} \\ &= \frac{2u_n - 1 - u_n^2}{\sqrt{2u_n + 1} + u_n} \\ &= -\frac{(u_n - 1)^2}{\sqrt{2u_n + 1} + u_n} < 0 \end{aligned}$$

On en déduit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.

3. Comme la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et minorée par 1 alors elle converge par le théorème de la convergence monotone. On note  $\ell$  sa limite. On a  $\ell$  qui vérifie la relation de récurrence d'où  $\ell = \sqrt{2\ell - 1}$ .

$$\ell = \sqrt{2\ell - 1} \iff \ell^2 = 2\ell - 1 \iff (\ell - 1)^2 = 0 \iff \ell = 1.$$

**Exercice 6.**  $u_0 = 1$  et  $u_n = \sqrt{1 + u_{n-1}}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Par récurrence posons  $P_n$  : " $0 \leq u_n \leq 2$ ".

*Initialisation* : Pour  $n = 0$  on a bien  $u_0 = 1 \in [0, 2]$ . Donc  $P_0$  est vraie.

*Hérédité* : Soit  $n \in \mathbb{N}$  et supposons  $P_n$  vraie, montrons que  $P_{n+1}$  est vraie.

On a  $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ . Comme  $u_n \geq 0$  alors  $1 + u_n \geq 0$ . Donc  $u_{n+1}$  existe,  $u_{n+1} \geq 0$  et  $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \leq \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3} < 2$ . Donc  $P_{n+1}$  est vraie et ainsi  $P_n$  est héréditaire.

*Conclusion* : Comme  $P_0$  est vraie et que  $P_n$  est héréditaire alors  $P_n$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

2. Soit  $R_n$  : " $u_n < u_{n+1}$ ". Montrons que  $R_n$  est vraie par récurrence.

$R_0$  : " $u_0 < u_1$ ". Donc  $R_0$  : " $1 < \sqrt{2}$ ". Ainsi  $R_0$  est vraie. Supposons  $R_n$  vraie pour  $n \in \mathbb{N}$  fixé.

Montrons que  $R_{n+1}$  : " $u_{n+1} < u_{n+2}$ " est vraie.

Comme  $R_n$  est vraie alors  $u_n < u_{n+1}$ , donc  $1 + u_n < 1 + u_{n+1}$  et par suite  $\sqrt{1 + u_n} < \sqrt{1 + u_{n+1}}$ .

Ainsi  $u_{n+1} < u_{n+2}$ . Donc  $R_{n+1}$  est vraie.

En conclusion  $R_n$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Ainsi  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.

3. Comme  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et majorée (par 2) alors par le théorème de convergence monotone,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge. On note  $\ell$  sa limite. La limite vérifie la relation de récurrence d'où  $\ell = \sqrt{1 + \ell}$ .

Comme  $u_n \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  alors  $\ell \geq 0$ .

$$\text{On a } \ell^2 - \ell - 1 = 0. \quad \Delta = 5.$$

$l_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ . Donc  $l_1$  ne convient pas.

$l_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0$ . Ainsi  $l = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

### Exercice 7.

1.  $u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + 5$ .  $u_0 = 3$ .

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmético-géométrique. On utilise la méthode de l'exercice 6-3.

Cherchons  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $\alpha = \frac{1}{6}\alpha + 5$ .

$$\alpha = \frac{1}{6}\alpha + 5 \iff \frac{5}{6}\alpha = 5 \iff \alpha = 6.$$

Posons  $v_n := u_n - \alpha$ .

On obtient  $v_{n+1} = \frac{1}{6}v_n$ .

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{6}$  et de premier terme  $v_0 = u_0 - \alpha = 3 - 6 = -3$ .

$$\text{Donc } v_n := \left(\frac{1}{6}\right)^n v_0 = -3 \left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{-3}{6^n}.$$

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ .

$v_n = u_n - \alpha$ . Donc  $u_n = v_n + \alpha = v_n + 6$ .

Ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 6$ .

Pour les questions 2, 3 et 4 nous ne donnons que des indications qui guident l'étude de chaque suite :

2.  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmético-géométrique. Voir méthode exercice 6-3.

On trouve que  $u_n$  n'a pas de limite.

3. Montrez que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et minorée par 0.

En déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et que sa limite est  $l = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

4. Montrez que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et majorée par 4.

En déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et que sa limite est 4.

5.  $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{2}{9}$ ,  $u_0 = 0$ .

a) Montrons par récurrence que  $0 \leq u_n \leq \frac{1}{3}$  pour tout  $n \geq 0$ .

Soit  $P(n)$  : " $0 \leq u_n \leq \frac{1}{3}$ ".

$P(0)$  : " $0 \leq u_0 \leq \frac{1}{3}$ ".

$P(0)$  est vrai car  $u_0 = 0$ .

Supposons que  $P(n)$  est vraie pour un entier  $n$  donné et montrons que  $P(n+1)$  est vraie.

$P(n+1)$  : " $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{3}$ ".

$u_{n+1} = u_n^2 + \frac{2}{9}$  donc  $u_{n+1} \geq 0$ .

$P(n)$  vraie implique  $0 \leq u_n \leq \frac{1}{3}$ . Donc  $u_n^2 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^2$  c'est à dire  $u_n^2 \leq \frac{1}{9}$ . Donc  $u_n^2 + \frac{2}{9} \leq \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ .

Comme  $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{2}{9}$  alors  $u_{n+1} \leq \frac{1}{3}$ . Donc  $P(n+1)$  est vraie.

En conclusion  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Donc  $0 \leq u_n \leq \frac{1}{3}$  pour tout  $n \geq 0$ .

b) On va montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante par récurrence.

Soit  $R(n) : "u_n \leq u_{n+1}"$ .

$R(0) : "u_0 \leq u_1"$ .

$R(0) : "0 \leq \frac{2}{9}"$ . Donc  $R(0)$  est vraie.

Supposons que  $R(n)$  est vraie pour un entier  $n$  donné et montrons que  $R(n+1)$  est vraie.

$R(n+1) : "u_{n+1} \leq u_{n+2}"$ .

$R(n)$  vraie  $\implies u_n \leq u_{n+1} \implies u_n^2 \leq u_{n+1}^2 \implies u_n^2 + \frac{2}{9} \leq u_{n+1}^2 + \frac{2}{9} \implies u_{n+1} \leq u_{n+2}$ .

Donc  $R(n+1)$  est vraie.

En conclusion  $R(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Donc  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.

c) D'après ce qui précède  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante et majorée par  $\frac{1}{3}$ . Donc  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

Soit  $\ell$  sa limite,  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

$u_{n+1} = u_n^2 + \frac{2}{9}$ . En passant aux limites on obtient :  $\ell = \ell^2 + \frac{2}{9}$ .

Comme  $0 \leq u_n \leq \frac{1}{3}$  pour tout  $n \geq 0$ , alors  $\ell \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ .

$$\ell^2 - \ell + \frac{2}{9} = 0.$$

$$\Delta = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}.$$

$$\sqrt{\Delta} = \frac{1}{3}.$$

$$\ell_1 = \frac{1 - \frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{3} \in \left[0, \frac{1}{3}\right].$$

$$\ell_2 = \frac{1 + \frac{1}{3}}{2} = \frac{2}{3} \notin \left[0, \frac{1}{3}\right]. \text{ Donc } \ell_2 \text{ ne convient pas.}$$

$$\text{Donc } \ell = \frac{1}{3}.$$

6.  $u_0 = 2, u_1 = \frac{1}{3}, u_2 = -\frac{1}{2}, u_3 = -3, u_4 = 2 = u_0$ . Donc les termes vont se répéter. Ainsi la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est périodique. On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_{4n} = 2.$$

$$u_{4n+1} = \frac{1}{3}.$$

$$u_{4n+2} = -\frac{1}{2}.$$

$$u_{4n+3} = -3.$$

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas convergente.

**Exercice 8.**  $\frac{u_n}{1+u_n} = \frac{u_n + 1 - 1}{1+u_n} = 1 - \frac{1}{1+u_n}$ .

Donc  $\frac{1}{1+u_n} = 1 - \frac{u_n}{1+u_n}$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{1+u_n} = 0$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+u_n} = 1$ .

Par suite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1+u_n) = 1$ , d'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

**Exercice 9.** La suite  $(u_{2n})_n$  converge vers  $\ell \in \mathbb{R}$ .  
 Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par hypothèse de croissance, on a

$$u_{2n} \leq u_{2n+1} \leq u_{2n+2}.$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+2} = \ell$ . D'après le théorème des gendarmes, on obtient  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = \ell$ .  
 En résumé on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = \ell$ . Donc la suite  $(u_n)_n$  est convergente vers  $\ell$ .

**Exercice 10.**  $u_0 \in [0, 1]$  et  $u_n = \frac{3 - u_{n-1}^2}{2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1.  $f(x) = \frac{3 - x^2}{2}$ . Notons que  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1.(a). On a  $f'(x) = -x$  donc  $f'(x) \leq 0$  pour tout  $x \in [0, +\infty[$ . Ainsi  $f$  est décroissante sur  $[0, +\infty[$ .

1.(b). Soit  $x \in [0, \sqrt{3}]$ . Alors  $f(x) = \frac{3 - x^2}{2} \geq \frac{3 - (\sqrt{3})^2}{2} = 0$  et  $f(x) = \frac{3 - x^2}{2} \leq \frac{3}{2} \leq \sqrt{3}$ . Ainsi  $f(x) \in [0, \sqrt{3}]$ . D'où l'intervalle  $[0, \sqrt{3}]$  est stable par  $f$ .

On en déduit que  $0 \leq u_n \leq \sqrt{3}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1.(c).  $f(\ell) = \ell \iff \frac{3 - \ell^2}{2} = \ell \iff 3 - \ell^2 = 2\ell \iff \ell^2 + 2\ell - 3 = 0$ . Il y a 2 solutions : 1 et  $-3$  mais comme  $\ell \in [0, +\infty[$  alors  $\ell = 1$ .

2. On montre par récurrence que la suite  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.

Soit  $P(n)$  : " $u_{2n} \leq u_{2n+2}$ ".

$P(0)$  : " $u_0 \leq u_2$ ".

$$u_2 = \frac{3 - u_1^2}{2} = \frac{3 - (\frac{3 - u_0^2}{2})^2}{2}. \text{ Posons } x := u_0. \text{ On a } u_2 = \frac{3 - (\frac{3 - x^2}{2})^2}{2} = \frac{-x^4 + 6x^2 + 3}{8}.$$

$$P(0) \iff x \leq \frac{-x^4 + 6x^2 + 3}{8} \iff x^4 - 6x^2 + 8x - 3 \leq 0.$$

Posons  $g(x) := x^4 - 6x^2 + 8x - 3$ .

$$g'(x) := 4x^3 - 12x + 8 = 4(x^3 - 3x + 2) = 4(x - 1)(x^2 + x - 2) = 4(x - 1)^2(x + 2).$$

Comme  $x \in [0, 1]$  alors  $g'(x) \geq 0$  donc  $g$  est croissante, d'où  $g(x) \leq g(1) = 0$ . Ainsi  $P(0)$  est vraie.

Supposons  $P(n)$  vraie pour  $n$  fixé. Etudions  $P(n + 1)$ .

$P(n + 1)$  : " $u_{2n+2} \leq u_{2n+4}$ ".

Comme  $P(n)$  est vraie alors  $u_{2n} \leq u_{2n+2}$ . On sait que  $f$  est décroissante sur  $[0, +\infty[$ . Donc  $f(u_{2n}) \geq f(u_{2n+2})$ , d'où  $u_{2n+1} \leq u_{2n+3}$ . On applique  $f$  de nouveau, on obtient  $f(u_{2n+1}) \geq f(u_{2n+3})$ . Ainsi  $u_{2n+2} \geq u_{2n+4}$ . Par suite  $P(n + 1)$  est vraie.

En conclusion  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Donc la suite  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_{2n} \leq u_{2n+2}$ . Comme  $f$  est décroissante alors  $f(u_{2n}) \geq f(u_{2n+2})$ . Donc  $u_{2n+1} \geq u_{2n+3}$ .

Ainsi la suite  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.

3. Par le théorème de convergence monotone comme  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante majorée (par  $\sqrt{3}$ ) et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante minorée (par 0) alors ces deux suites convergent. On note  $\ell_1$  et  $\ell_2$  leurs limites respectives :  $\ell_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n}$  et  $\ell_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1}$ .

Comme  $u_{2n+1} = \frac{3 - u_{2n}^2}{2}$  et  $u_{2n+2} = \frac{3 - u_{2n+1}^2}{2}$ , alors par passage aux limites, on a :

$$\ell_2 = \frac{3 - \ell_1^2}{2} \text{ et } \ell_1 = \frac{3 - \ell_2^2}{2}.$$

$$\text{Donc } 2\ell_2 = 3 - \ell_1^2 \text{ et } 2\ell_1 = 3 - \ell_2^2.$$

$$\text{Donc } 2\ell_2 - 2\ell_1 = (3 - \ell_1^2) - (3 - \ell_2^2) = \ell_2^2 - \ell_1^2 = (\ell_2 - \ell_1)(\ell_2 + \ell_1).$$

$$\text{C'est à dire } 2(\ell_2 - \ell_1) - (\ell_2 - \ell_1)(\ell_2 + \ell_1) = 0.$$

On a donc  $(\ell_2 - \ell_1)(2 - (\ell_2 + \ell_1)) = 0$ . Donc  $\ell_1 = \ell_2$  ou  $\ell_2 + \ell_1 = 2$ .

Si  $\ell_1 = \ell_2$  alors  $\ell_1 = \frac{3 - \ell_1^2}{2}$ , donc  $2\ell_1 = 3 - \ell_1^2$ . Par suite  $\ell_1^2 + 2\ell_1 - 3 = 0$ , les solutions sont 1 et  $-3$ .

Comme  $1 \in [0, \sqrt{3}]$  et  $-3 \notin [0, \sqrt{3}]$  alors  $\ell_1 = 1$  et  $\ell_2 = 1$ .

Si  $\ell_2 + \ell_1 = 2$  alors  $\ell_2 = 2 - \ell_1$ . Comme  $\ell_2 = \frac{3 - \ell_1^2}{2}$  alors  $2(2 - \ell_1) = 3 - \ell_1^2$ . Donc  $2(2 - \ell_1) = 3 - \ell_1^2$ . Ce

qui donne  $4 - 2\ell_1 = 3 - \ell_1^2$ .

$$\ell_1^2 - 2\ell_1 + 1 = 0$$

$(\ell_1 - 1)^2 = 0$ , d'où  $\ell_1 = 1$ , par suite  $\ell_2 = 1$ .

Dans les deux cas  $\ell_1 = \ell_2 = 1$ . On en déduit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 1.

### Exercice 11.

1. D'après un théorème du cours,  $(w_n)_n$  converge aussi.

2. Si  $(w_n)_n$  ne converge pas, alors au moins une entre  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  ne converge pas (il s'agit juste de la contraposée de l'implication précédente).

Rappel :

(i) La contraposée de  $P \implies Q$  est  $(\text{non } Q) \implies (\text{non } P)$ .

(ii)  $P \implies Q$  est équivalente à sa contraposée.

3. Il suffit de prendre  $u_n = n$  et  $v_n = -n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### Exercice 12.

1.

$$w_n = u_n^2 + 2u_n \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{4}v_n^2 + \frac{3}{4}v_n^2 = \left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right)^2 + \frac{3}{4}v_n^2.$$

2. Du point précédent, on déduit que  $w_n \geq 0$ .

On a

$$0 \leq \left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right)^2 \leq w_n \quad (i)$$

et

$$0 \leq \frac{3}{4}v_n^2 \leq w_n$$

c'est à dire

$$0 \leq v_n^2 \leq \frac{4}{3}w_n \quad (ii)$$

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$ . Le théorème des gendarmes appliqué à (ii) donne  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n^2 = 0$  et par suite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ .

De même le théorème des gendarmes appliqué à (i) donne  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right)^2 = 0$  et par suite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right) = 0$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$  et que  $u_n = \left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right) - \frac{1}{2}v_n$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

### Exercice 13.

1.(a). Par définition de limite, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq N_\varepsilon$ , on a

$$10 - \varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 10 + \varepsilon.$$

Alors, il suffit de prendre  $\varepsilon = 5$  et  $N = N_\varepsilon$ , et utiliser le fait que  $u_n$  est positif.

2ème méthode :

Comme  $\lim_{\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 10$ , alors à partir d'un certain rang  $N$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 5$ , c'est à dire :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 5.$$

Comme  $u_n > 0$ , alors :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_{n+1} \geq 5u_n.$$



**1.(b).** Par récurrence sur  $n \geq N$ .

Soit  $P(n) : "u_n \geq 5^{n-N}u_N"$ .

$P(N) : "u_N \geq 5^0u_N"$ . Donc  $P(N)$  est vraie.

On suppose  $P(n)$  vraie pour  $n$  fixé.

$P(n+1) : "u_{n+1} \geq 5^{n+1-N}u_N"$ .

On a  $u_{n+1} \geq 5u_n \geq 5 \cdot 5^{n-N}u_N = 5^{n+1-N}u_N$ . Donc  $P(n+1)$  est vraie.

En conclusion  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \geq N$ .

Ainsi pour tout  $n \geq N$ ,  $u_n \geq 5^{n-N}u_N$ .

2ème méthode :

Pour tout  $n \geq N+1$ , on a :

$$u_{N+1} \geq 5u_N.$$

$$u_{N+2} \geq 5u_{N+1}.$$

...

...

...

...

$$u_n \geq 5u_{n-1}.$$

Multiplions ces inégalités membre à membre (en simplifiant mentalement), nous obtenons une nouvelle inégalité :

$$u_n \geq 5^p u_N$$

où  $p$  est le nombre de ces termes :  $u_{N+1}, u_{N+2}, \dots, u_n$ . On a  $p = n - (N+1) + 1 = n - N$ .

$$\text{Donc } u_n \geq 5^{n-N}u_N.$$

Or pour  $n = N$ ,  $u_n = u_N = 5^{n-N}u_N$ .

Ainsi pour tout  $n \geq N$ ,  $u_n \geq 5^{n-N}u_N$ .

**1.(c).** Il s'agit d'une simple conséquence du point précédent, avec le fait que  $u_N > 0$  par hypothèse.

En effet : Comme  $N$  est fixé alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5^{n-N} = +\infty$ . Comme  $u_N > 0$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5^{n-N}u_N = +\infty$ .

Or  $u_n \geq 5^{n-N}u_N$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

**2.(a).** On applique encore une fois la définition de limite (comme on a fait au point 1.a. ci-dessus), avec  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ .

2ème méthode :

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$ , alors à partir d'un certain rang  $N$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$ , c'est à dire :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}.$$

Comme  $u_n > 0$ , alors :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n.$$

**2.(b).** En raisonnant comme avant (par exemple par récurrence) , on prouve que  $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} u_N$ .

Comme  $N$  est fixé et que  $-1 < \frac{1}{2} < 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} = 0$ .

Comme  $u_N > 0$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} u_N = 0$ .

Or  $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} u_N$ , donc par le théorème des gendarmes,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

**Exercice 14.**

1. On remarque que  $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2}$ . Comme  $\frac{1}{(n+1)^2} > 0$  alors  $(u_n)_n$  est croissante. En utilisant cette propriété, on peut écrire

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n(n+1)^2} \left( n + n(n+1) - (n+1)^2 \right) = -\frac{2}{n(n+1)^2} < 0. \end{aligned}$$

Donc  $(v_n)_n$  est décroissante.

2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ . Comme  $(u_n)_n$  est croissante et  $(v_n)_n$  est décroissante, alors  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  sont des suites adjacentes, par suite les deux suites sont convergentes vers la même limite.

**Exercice 15.** On commence par remarquer que, par hypothèse de croissance de  $(u_n)_n$ , on a  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ .

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} \leq \frac{u_n + u_n + \dots + u_n}{n} = \frac{nu_n}{n} = u_n. \text{ Ainsi } v_n \leq u_n \leq \ell \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

1. En utilisant la définition de  $v_n$ , on trouve tout de suite que

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) \sum_{j=1}^n u_j + \frac{u_{n+1}}{n+1} = -\frac{1}{n(n+1)} \sum_{j=1}^n u_j + \frac{u_{n+1}}{n+1} \\ &= -\frac{v_n}{n+1} + \frac{u_{n+1}}{n+1} \geq \frac{1}{n+1} (-u_n + u_{n+1}) \geq 0, \end{aligned}$$

On a utilisé aussi la propriété  $v_n \leq u_n$  pour écrire la première inégalité.

On en déduit que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante.

2. On a déjà montré que  $v_n \leq \ell$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , donc  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est majorée. Comme elle est croissante, alors elle converge.

3. On sait que  $v_n \leq \ell$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Comme  $\ell' = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  alors  $\ell' \leq \ell$ . (i)

4.

$$v_{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n u_j + \frac{1}{2n} \sum_{j=n+1}^{2n} u_j = \frac{1}{2} v_n + \frac{1}{2n} \sum_{j=n+1}^{2n} u_j \geq \frac{1}{2} v_n + \frac{1}{2n} \cdot nu_n = \frac{v_n}{2} + \frac{u_n}{2}.$$

Ainsi  $v_{2n} \geq \frac{u_n + v_n}{2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

5. En passant à la limite à droite et à gauche de l'inégalité qu'on vient de montrer, on trouve  $\ell' \geq \frac{\ell + \ell'}{2}$ , par suite  $\ell' \geq \ell$ . (ii).

(i) et (ii) impliquent  $\ell = \ell'$ .

**Exercice 16.**

1.  $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$ .

2.  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}$ .

$$u_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Cela implique que  $(u_n)_n$  est convergente de limite égale à 1.

**Exercice 17.**  $u_0 \in ]1, 2[$  et  $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{4} + \frac{3}{4}$ .

**1. et 2.** Par récurrence, l'initialisation étant vérifiée par hypothèse. Prouvons alors l'hérédité : supposons que  $1 < u_n \leq 2$ . Cela implique tout de suite que  $u_{n+1} > \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ , et que  $u_{n+1} \leq \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{3}{4} \leq 2$ .

La propriété est donc vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**3.** Par récurrence on montre que  $(u_n)_n$  est décroissante, donc monotone.

Soit  $P(n)$  : " $u_{n+1} \leq u_n$ ".

$P(0)$  : " $u_1 \leq u_0$ ".

$$P(0) \iff u_1 - u_0 \leq 0 \iff \frac{1}{4}u_0^2 + \frac{3}{4} - u_0 \leq 0 \iff u_0^2 - 4u_0 + 3 \leq 0 \iff (u_0 - 1)(u_0 - 3) \leq 0.$$

Comme  $u_0 \in ]1, 2[$  alors la proposition " $(u_0 - 1)(u_0 - 3) \leq 0$ " est vraie. Par suite  $P(0)$  est vraie.

Supposons  $P(n)$  vraie pour  $n$  fixé.

$P(n+1)$  : " $u_{n+2} \leq u_{n+1}$ ".

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2}{4} + \frac{3}{4} \leq \frac{u_n^2}{4} + \frac{3}{4} = u_{n+1}.$$

Donc  $P(n+1)$  est vraie.

En conclusion  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Donc  $(u_n)_n$  est décroissante. Comme elle est minorée par 1, alors elle converge. Soit  $\ell$  sa limite.

Comme  $1 < u_n \leq 2$  alors  $\ell \in [1, 2]$ .

**4.** En passant à la limite dans la formule définissant  $u_{n+1}$ , on trouve  $\ell = \frac{1}{4}\ell^2 + \frac{3}{4}$  ce qui équivaut à  $\ell^2 - 4\ell + 3 = 0$ . Les solutions sont 3 et 1. Comme  $\ell \in [1, 2]$  alors  $\ell = 1$ .

**Exercice 18.**

**1.**  $f'(x) = 2(x-1)$ , qui est positive sur  $[1, +\infty[$ . Maintenant, par croissance, il suffit de calculer  $f(1) = 1$  et  $f(2) = 2$  : on a donc que  $f(]1, 2[) = ]1, 2[$ , autrement dit l'intervalle  $]1, 2[$  est stable par  $f$ .

**2.** Par récurrence.

Initialisation.  $u_0 = \frac{3}{2}$ , donc  $u_0$  appartient à l'intervalle  $]1, 2[$ .

Hérédité. Supposons maintenant que  $u_n \in ]1, 2[$ . On a  $u_{n+1} = f(u_n)$ , et donc, par stabilité de l'intervalle, on a aussi que  $u_{n+1} \in ]1, 2[$ .

La propriété est donc vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**3.** On étudie  $f(x) - x = x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$ , qui est donc toujours strictement négative dans  $]1, 2[$ . On en déduit que  $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n < 0$  pour tout  $n$ . Par suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement décroissante, donc monotone.

**4.** La suite  $(u_n)_n$  est décroissante et minorée (par 1) donc elle converge. Soit  $\ell$  sa limite. Vu que la suite est décroissante, on a  $1 \leq \ell \leq u_0 < 2$ . En passant à la limite dans la formule qui définit  $u_{n+1}$ , par continuité de  $f$  on trouve que  $\ell$  doit être un point fixe de  $f$  :  $\ell = f(\ell)$ .

$\ell = f(\ell) \iff \ell^2 - 3\ell + 2 = 0 \iff \ell = 1$  ou  $\ell = 2$ . La seule valeur admissible est  $\ell = 1$  car  $\ell \leq u_0 = \frac{3}{2}$ .

**Exercice 19.**

**1.** De la définition de  $u_{n+1}$ , on a  $u_{n+1} > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Donc  $u_n > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**2.** Si la suite converge vers une limite  $\ell$ , alors  $\ell$  doit vérifier  $\ell = \frac{1}{6}\ell^2 + \frac{3}{2}$ .

Ce qui équivaut à  $\ell^2 - 6\ell + 9 = (\ell - 3)^2 = 0$ .

Donc  $\ell = 3$ .

**3.** Il s'agit d'une simple récurrence.

Initialisation.  $u_0 < 3$  est vraie car  $u_0 = 0$ .

Hérédité. Supposons maintenant que  $u_n < 3$  pour  $n$  fixé. On a

$$u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n^2 + \frac{3}{2} < \frac{1}{6}3^2 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3.$$

La propriété est alors vraie au rang  $n + 1$ .

En conclusion  $u_n < 3$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

4. Soit  $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}$ . On a

$$f(x) - x = \frac{1}{6}(x^2 + 9 - 6x) = \frac{(x-3)^2}{6} \geq 0.$$

Étant donné que  $u_{n+1} = f(u_n)$ , on voit tout de suite que  $u_n$  est croissante. Comme elle est majorée alors elle admet une limite finie  $\ell$ , qui doit vérifier (par le point 3.)  $\ell \leq 3$ . Par le point 2., on a donc  $\ell = 3$ .

### Exercice 20.

1.  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = 2$ ,  $u_2 = \frac{3}{2}$  et  $u_3 = \frac{5}{3}$ .

2. C'est une simple récurrence.

$P(n)$  : "  $1 \leq u_n \leq 2$  ".

$P(0)$  : "  $1 \leq u_0 \leq 2$  ". Comme  $u_0 = 1$  alors  $P(0)$  est vraie.

On suppose  $P(n)$  vraie pour  $n$  fixé.

Étudions  $P(n+1)$  : "  $1 \leq u_{n+1} \leq 2$  ".

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}.$$

$1 \leq u_n \leq 2 \implies \frac{1}{2} \leq \frac{1}{u_n} \leq 1 \implies 1 + \frac{1}{2} \leq 1 + \frac{1}{u_n} \leq 1 + 1 \implies \frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq 2$ . Donc  $P(n+1)$  est vraie.

En conclusion  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Donc  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq u_n \leq 2$ .

3. Posons  $f(x) := 1 + \frac{1}{x}$ . On a  $f'(x) := -\frac{1}{x^2} < 0$ . Donc  $f$  est strictement décroissante. Notons que  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

On montre par récurrence que  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.

Soit  $P(n)$  : "  $u_{2n} < u_{2n+2}$  ".

$P(0)$  : "  $u_0 < u_2$  ". Comme  $u_0 = 1$  et  $u_2 = \frac{3}{2}$  alors  $P(0)$  est vraie.

Supposons  $P(n)$  vraie pour  $n \in \mathbb{N}$  fixé.

Montrons que  $P(n+1)$  : "  $u_{2n+2} < u_{2n+4}$  " est vraie.

Comme  $P(n)$  est vraie alors  $u_{2n} < u_{2n+2}$ , donc  $f(u_{2n}) > f(u_{2n+1})$  car  $f$  décroissante. Par suite  $u_{2n+1} > u_{2n+3}$ . On a  $f(u_{2n+1}) < f(u_{2n+3})$ , c'est à dire  $u_{2n+2} < u_{2n+4}$ . Donc  $P(n+1)$  est vraie.

En conclusion  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Ainsi  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante. Comme elle est majorée alors elle converge vers une limite  $\ell$ .

$u_{2n+1} = f(u_{2n})$  et  $u_{2n+3} = f(u_{2n+2})$ . Comme  $u_{2n} < u_{2n+2}$  et que  $f$  est décroissante alors  $u_{2n+1} > u_{2n+3}$ . Donc  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante. Comme elle est minorée alors elle converge vers une limite  $\ell'$ .

De la définition de  $u_{n+1}$ , on trouve rapidement que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$u_{2n+2} = 1 + \frac{u_{2n}}{1 + u_{2n}} \quad \text{et} \quad u_{2n+3} = 1 + \frac{u_{2n+1}}{1 + u_{2n+1}}. \quad (1)$$

Donc  $\ell$  et  $\ell'$  sont solutions de l'équation (E) :  $x = 1 + \frac{x}{1+x}$ .

$$(E) \iff x - 1 = \frac{x}{1+x} \iff x^2 - 1 = x \iff x^2 - x - 1 = 0.$$

$\Delta = 5$ . Les racines de l'équation sont  $x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$  et  $x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ . Or de 2) découle :  $\ell, \ell' \in [1, 2]$

$$\text{donc } \ell = \ell' = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{2n} - u_{2n+1}) = \ell - \ell' = 0.$$

On a  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante,  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{2n} - u_{2n+1}) = 0$ . Donc les deux suites  $(u_{2n})_n$  et  $(u_{2n+1})_n$  sont adjacentes.

$$4. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ implique } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

### Exercice 21.

1. On pose  $u_n := \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$ . On a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n} = \frac{-2}{n(n+2)} < 0.$$

Donc  $(u_n)_n$  est décroissante.

2. On pose  $u_n := n - 2^n$ . On a :

$$u_{n+1} - u_n = n + 1 - 2^{n+1} - (n - 2^n) = 1 - 2^n \times 2 + 2^n = 1 + 2^n(-2 + 1) = 1 - 2^n \leq 1 - 2^0 = 0.$$

Donc  $(u_n)_n$  est décroissante.

3. On pose  $u_n := \frac{e^n}{n!}$ . On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{e^n} = \frac{e^{n+1-n}}{n+1} = \frac{e}{n+1} < 1 \text{ si } n \geq 3.$$

Donc la suite  $(u_n)_n$  est décroissante à partir du rang  $N = 3$ .

4. On pose  $u_n := (n+1)(n+2) \dots (n+n)$ . On a :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1+1)(n+1+2) \dots (n+1+n-1)(n+1+n)(n+1+n+1)}{(n+1)(n+2) \dots (n+n)} \\ &= \frac{(n+1+n)(n+1+n+1)}{n+1} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1} \geq 1. \end{aligned}$$

Donc  $(u_n)_n$  est croissante.

5. On pose  $u_n := \frac{n-1}{n+3}$ . On a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n}{n+4} - \frac{n-1}{n+3} = \frac{n(n+3) - (n-1)(n+4)}{(n+4)(n+3)} = \frac{4}{(n+4)(n+3)} > 0.$$

Donc  $(u_n)_n$  est croissante.

6. On pose  $u_n := n - sh(n)$ . On a :

$$u_{n+1} - u_n = n + 1 - sh(n+1) - (n - sh(n)) = 1 - sh(n+1) + sh(n).$$

Or  $sh(n+1) = sh(n)ch(1) + sh(1)ch(n) \geq sh(n) + sh(1) \geq sh(n) + 1$ . Ainsi  $u_{n+1} - u_n \leq 0$ .

Donc  $(u_n)_n$  est décroissante.

**Exercice 22.**

1. On commence par remarquer la suite d'inégalités suivantes :

$$1 \leq u_n \leq v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^* .$$

On a  $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)!} \geq u_n$ , donc  $(u_n)_n$  est croissante.

Pour  $(v_n)_n$ , on calcule

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n n!} \\ &= \frac{1}{(n+1)n(n+1)!} ((n+1)n + n - (n+1)^2) \\ &= -\frac{1}{(n+1)n(n+1)!} < 0 . \end{aligned}$$

Donc  $(v_n)_n$  est décroissante.

2.  $u_1 = 1$  et  $v_1 = u_1 + 1 = 2$ .

On a

$$u_1 \leq u_n \leq v_n \leq v_1 .$$

Donc

$$1 \leq u_n \leq v_n \leq 2 ,$$

$(u_n)_n$  est croissante et majorée (par 2), donc  $(u_n)_n$  est convergente.

$(v_n)_n$  est décroissante et minorée (par 1), donc  $(v_n)_n$  est convergente.