

---

Feuille d'exercices n° 10

POLYNÔMES

---

**Exercice 1.** Quelles sont les racines (dans  $\mathbf{C}$ , dans  $\mathbf{R}$  et dans  $\mathbf{Q}$ ) des polynômes suivants ?

- a)  $X^3 - 7X^2 + 14X - 8$ ,      b)  $X^n - 1$ , où  $n$  est un entier,      c)  $X^6 - 4$ ,  
d)  $X^4 - 13X^2 + 36$ ,      e)  $X^4 + 6X^2 + 25$ .

**Exercice 2.** Pour chacun des polynômes suivants, dresser la liste complète des polynômes qui le divisent dans l'anneau de polynômes précisé :

- a)  $X + 1$  dans  $\mathbf{R}[X]$ ,      b)  $X^2 - 1$  dans  $\mathbf{R}[X]$ ,  
c)  $X^2 + 1$  dans  $\mathbf{C}[X]$ ,      d)  $X^2 + 1$  dans  $\mathbf{R}[X]$ .

**Exercice 3.**

1. Soit  $P$  un polynôme à coefficients réels. Montrer que, pour tout  $a \in \mathbf{C}$ , on a  $\overline{P(a)} = P(\bar{a})$ .
2. Soit  $P, Q$  deux polynômes à coefficients complexes tels que  $P(x) = Q(x)$  pour tout  $x \in \mathbf{R}$ . Montrer que  $P = Q$ .
3. Soit  $P \in \mathbf{C}[X]$  tel que  $P(x) \in \mathbf{R}$  pour tout  $x \in \mathbf{R}$ . Montrer que  $P \in \mathbf{R}[X]$ .

**Exercice 4.** Développer  $P = (X^3 - X^2 + 1)(X^2 + X + 1) \in \mathbf{R}[X]$ . En déduire une preuve que 100011 n'est pas un nombre premier.

**Exercice 5.** Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbf{R}[X]$ , et soient  $a$  et  $b$  deux réels distincts. Soient  $\lambda$  (respectivement,  $\mu$ ) le reste de la division euclidienne de  $P(X)$  par  $X - a$  (respectivement, par  $X - b$ ). Calculer le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - a)(X - b)$ . Commenter le cas  $\lambda = \mu = 0$ .

**Exercice 6.** Établir les identités, pour  $n \in \mathbf{N}^*$

$$X^n - 1 = (X - 1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1),$$
$$X^{2n+1} + 1 = (X + 1)(X^{2n} - X^{2n-1} + X^{2n-2} - \dots + (-1)^p X^p \dots - X + 1).$$

En déduire les résultats suivants

1. Si le nombre de Mersenne  $M_n = 2^n - 1$  est premier, alors  $n$  est premier.
2. Si le nombre de Fermat  $F_n = 2^n + 1$  est premier, alors  $n$  est soit nul, soit une puissance de 2.

**Exercice 7.** Pour quels entiers  $n$  le polynôme  $X^{2n} + X^n + 1$  est-il divisible par  $X^2 + X + 1$  dans  $\mathbf{R}[X]$  ?

**Exercice 8.** Factoriser les polynômes suivants en polynômes irréductibles

1.  $X^n + X^{n-1} + \dots + 1$  dans  $\mathbf{C}[X]$ ,
2.  $X^{11} + 2^{11}$  dans  $\mathbf{C}[X]$  puis dans  $\mathbf{R}[X]$ ,
3.  $X^4 + 4$  dans  $\mathbf{C}[X]$  puis dans  $\mathbf{R}[X]$ , et enfin dans  $\mathbf{Q}[X]$ ,
4.  $X^4 - j$  dans  $\mathbf{C}[X]$ , où  $j = \exp(2i\pi/3)$ .
5.  $X^8 + X^4 + 1$  dans  $\mathbf{R}[X]$ .
6.  $X^5 - 1$  dans  $\mathbf{R}[X]$ .

**Exercice 9.** Soit  $P = (X^2 - X + 1)^2 + 1$ .

1. Vérifier que  $i$  est racine de  $P$ .
2. En déduire alors la décomposition en produit de facteurs irréductibles de  $P$  sur  $\mathbf{R}[X]$  et sur  $\mathbf{C}[X]$ .

**Exercice 10.** Soit  $a \in \mathbf{R}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , et le polynôme  $P = (\cos a + X \sin a)^n \in \mathbf{R}[X]$ . Calculer le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $X^2 + 1$ .

**Exercice 11.** On rappelle que  $j = e^{2i\pi/3}$ . Soit le polynôme  $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$ .

1. Montrer que  $j$  est racine de ce polynôme. Déterminer son ordre de multiplicité.
2. Décomposer  $P$  en facteurs irréductibles dans  $\mathbf{C}[X]$  et dans  $\mathbf{R}[X]$  (on pourra utiliser judicieusement le fait que  $P$  est pair).

**Exercice 12.** Soit le polynôme  $P = X^6 + 4X^5 + 8X^4 + 10X^3 + aX^2 + 4X + 1 \in \mathbf{R}[X]$ . On suppose que  $-1$  est une racine de  $P$ .

1. Déterminer  $a$ .
2. Montrer que  $-1$  est racine double de  $P$ .
3. Montrer que  $j$  est racine multiple de  $P$ .
4. Factoriser  $P$  en facteurs irréductibles, d'abord dans  $\mathbf{C}[X]$  puis dans  $\mathbf{R}[X]$ .

**Exercice 13.** Soit  $\theta$  un réel, et  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer que le reste de la division euclidienne dans  $\mathbf{C}[X]$  de  $X^n \sin(\theta) - X \sin(n\theta) + \sin((n-1)\theta)$  par  $X^2 - 2X \cos(\theta) + 1$  est nul. Qu'en est-il dans  $\mathbf{R}[X]$  ?

**Exercice 14.**

1. Calculer le PGCD unitaire des polynômes  $2X^4 + X^2 + X + 1$  et de  $X^6 - X^5 + X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 3X + 1$ .
2. Montrer que les polynômes  $X^4 - 1$  et  $X^3 + 2X^2 - X - 1$  sont premiers entre eux, et établir une relation de Bézout entre eux.
3. Soient les polynômes complexes  $A = X^5 - X^4 + 2X^3 + 1$  et  $B = X^5 + X^4 + 2X^2 - 1$ . Calculer leur PGCD unitaire. En déduire une relation de Bézout entre  $A$  et  $B$ . Déterminer tous les couples de polynômes  $(U, V)$  vérifiant cette identité.
4. Reprendre la question 3. avec  $A = X^4 - X^3 + 2X^2 - 2X + 1$  et  $B = X^3 - X^2 + 2X - 1$ .

**Exercice 15.** Soit  $n$  et  $m$  deux entiers. Calculer le PGCD unitaire des polynômes  $X^n - 1$  et  $X^m - 1$ .

**Exercice 16.** Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $\lambda, \mu$  pour que  $X^2 + 1$  divise  $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$ .

**Solution :**

$$P \text{ divise } X^2 + 1 \Leftrightarrow P \text{ divise } X - i \text{ et } X + i \Leftrightarrow i \text{ et } -i \text{ sont des racines de } P \Leftrightarrow P(i) = P(-i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - i - \lambda + \mu i + 2 = 0 \\ 1 + i - \lambda - \mu i + 2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = 3, \mu = 2.$$

**Exercice 17.** Montrer que, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , on a

$$\prod_{k=0}^{n-1} (X^2 - 2X \cos(2k\pi/n) + 1) = (X^n - 1)^2.$$

**Exercice 18.** Soit  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 1$ , et soient  $z_1, \dots, z_n$  des nombres complexes (pas nécessairement distincts). On pose  $e_0 = 1$  et, pour  $k$  compris entre 1 et  $n$  :

$$e_k = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n} z_{j_1} z_{j_2} \dots z_{j_k}.$$

Voici quelques valeurs des  $e_k$  :

$$\begin{aligned} e_0 &= 1, \\ e_1 &= z_1 + z_2 + \dots + z_n, \\ e_2 &= (z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_1 z_n) + (z_2 z_3 + \dots + z_2 z_n) + \dots + (z_{n-1} z_n), \\ &\vdots \\ e_{n-1} &= z_2 \dots z_n + z_1 z_3 \dots z_n + \dots + z_1 \dots z_{n-1}, \\ e_n &= z_1 z_2 \dots z_n. \end{aligned}$$

1. Pour  $n = 2$  (resp.  $n = 3$ ), écrire explicitement  $e_1, e_2$  (resp.  $e_1, e_2, e_3$ ) et montrer que

$$(X - z_1)(X - z_2) = X^2 - e_1 X + e_2 \quad (\text{resp. } (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3) = X^3 - e_1 X^2 + e_2 X - e_3).$$

2. Pour  $n$  quelconque, montrer que l'on a :

$$\prod_{j=1}^n (X - z_j) = \sum_{k=0}^n (-1)^k e_k X^{n-k}.$$

3. Sachant que  $2i$  et  $3 - i$  sont des racines de  $X^3 + (i+1)X^2 - (8+4i)X - 4 + 28i$ , calculer la troisième racine complexe de ce polynôme.
4. Pour  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 2$ , déterminer sans calcul  $\sum_{1 \leq j \leq n} e^{2\pi i j/n}$  et  $\sum_{1 \leq j < k \leq n} e^{2\pi i(j+k)/n}$ .

**Exercice 19.** Soit  $P(X) = X^4 + 12X - 5$ . Décomposer ce polynôme en facteurs irréductibles dans  $\mathbf{R}[X]$ , en sachant qu'il admet deux racines dont la somme vaut 2.

**Exercice 20.** Quels sont les polynômes  $P \in \mathbf{C}[X]$  tels que  $P'$  divise  $P$  ?

**Exercice 21.**

1. Factoriser le polynôme  $X^2 - X + 1$  dans  $\mathbf{C}[X]$ .
2. Soit  $n$  un entier naturel. Montrer que  $(X - 1)^{n+2} + X^{2n+1}$  est divisible par  $X^2 - X + 1$ .

**Exercice 22.** Soit  $P \in \mathbf{C}[X]$  défini par  $P(X) = X^3 + 3X^2 + 2X + i$ .

1. Déterminer les racines du polynôme dérivé  $P'$ .
2. Montrer que  $P$  n'admet aucune racine réelle.
3. Dédurre des questions précédentes que  $P$  admet 3 racines distinctes dans  $\mathbf{C}$ , notées  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ .
4. Calculer  $\alpha + \beta + \gamma$ ,  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$  et  $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ .

**Exercice 23.** On note  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  et  $\alpha_5$  les racines complexes du polynôme  $P(X) = X^5 - 29X^4 + 117X^3 - 11X^2 + 4X + 1$ . Montrer que ces nombres sont différents de 0. Écrire le polynôme unitaire de degré 5 dont les racines sont  $1/\alpha_1, 1/\alpha_2, 1/\alpha_3, 1/\alpha_4$  et  $1/\alpha_5$ .

**Exercice 24.** Déterminer le PGCD unitaire de  $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$  et de  $X^4 - 1$ , considérés comme éléments de  $\mathbf{Q}[X]$ .

**Exercice 25.** Déterminer tous les polynômes de degré 3, divisibles par  $X - 1$ , et tels que les restes des divisions euclidiennes par  $X - 2$ , par  $X - 3$  et par  $X - 4$  soient égaux (mais certainement non nuls).

**Exercice 26.** Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ , et considérons le polynôme à coefficients réels  $P(X) = aX^{n+1} + bX^n + c$ . Peut-on choisir  $a, b, c$  pour que  $P$  admette 1 comme racine multiple ? Quel est alors l'ordre de cette racine ?

**Exercice 27.** Factoriser  $X^6 + X^3 + 1$  sous forme d'un produit de polynômes irréductibles de  $\mathbf{R}[X]$ .

**Exercice 28.** Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . Montrer que les polynômes  $1 + X + \dots + \frac{X^n}{n!}$  et  $1 + X + X^n$  n'ont que des racines simples dans  $\mathbf{C}$ .

**Exercice 29.** Montrer que le polynôme  $P = X^{163} - 24X^{57} - 6$  possède au moins une racine réelle, mais ne possède pas de racine rationnelle.

**Exercice 30.** Soient  $a, b$  des réels, et  $P = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1$ . Pour quelles valeurs de  $a$  et  $b$  le polynôme  $P$  est-il le carré d'un polynôme de  $\mathbf{R}[X]$  ?

**Exercice 31.**

1. Soient  $p_1, p_2, p_3$  et  $p_4$  quatre entiers. Trouver deux entiers  $q_1$  et  $q_2$  tels que  $(p_1^2 + p_2^2)(p_3^2 + p_4^2) = q_1^2 + q_2^2$ .  
(Indication : manipuler les nombres complexes  $p_1 + ip_2$  et  $p_3 + ip_4$ ).
2. Soient  $P_1, P_2, P_3$  et  $P_4$  quatre polynômes de  $\mathbf{R}[X]$ . En s'inspirant de la question précédente, trouver deux polynômes réels  $Q_1, Q_2$  tels que  $(P_1^2 + P_2^2)(P_3^2 + P_4^2) = Q_1^2 + Q_2^2$ .
3. Soit  $P \in \mathbf{R}[X]$ . Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :
  - (a) Pour tout réel  $x$ , on a  $P(x) \geq 0$ .
  - (b) Il existe  $Q_1, Q_2$  dans  $\mathbf{R}[X]$  tels que  $P = Q_1^2 + Q_2^2$ .

**Exercice 32.** Déterminer tous les polynômes  $P$  vérifiant les relations suivantes :

- a)  $P(X^2 + 1) = P(X)$ ,
- b)  $P(2X + 1) = P(X)$ ,
- c)  $(1 - X)P'(X) - P(X) = X^n$ , où  $n \in \mathbf{N}$ ,
- d)  $P'(X)^2 = 4P(X)$ ,
- e)  $P(P(X)) = P(X)$ .

**Exercice 33.**

1. Soient  $P_1, P_2$  et  $Q$  trois polynômes. Montrer que  $P_1 - P_2$  divise  $Q(P_1) - Q(P_2)$ .
2. Soit  $P$  un polynôme. Montrer que  $P(X) - X$  divise  $P(P(X)) - X$ .

**Exercice 34. (Polynômes de Tchebychev)** On considère la suite de polynômes  $P_n(x)$  définie par  $P_0(X) = 1, P_1(X) = X$ , et pour  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$P_{n+2}(X) = 2XP_{n+1}(X) - P_n(X).$$

1. Préciser  $P_2, P_3, P_4$ .
2. Déterminer le terme de plus haut degré de  $P_n$ .
3. Étudier la parité de  $P_n$ .
4. Montrer que pour tout  $n \in \mathbf{N}$  et  $\theta \in \mathbf{R}$ , on a  $P_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$ .

**Exercice 35.** Soit  $P$  un polynôme réel scindé à racines simples.

1. Montrer que  $P'$  est aussi scindé à racines simples.
2. Montrer que si  $a$  et  $b$  sont respectivement la plus petite et la plus grande racine de  $P$  alors les racines de  $P'$  sont comprises entre  $a$  et  $b$ .

**Exercice 36.** Soit  $P$  et  $Q$  deux polynômes rationnels.

1. Montrer que  $P|Q$  dans  $\mathbf{Q}[X]$  si, et seulement si  $P|Q$  dans  $\mathbf{C}[X]$ .
2. Montrer que  $P$  et  $Q$  ont le même PGCD considérés comme polynômes à coefficients dans  $\mathbf{Q}$  ou dans  $\mathbf{C}$ .
3. Montrer que si  $P$  est irréductible dans  $\mathbf{Q}[X]$  alors  $P$  et  $P'$  sont premiers entre eux (on dit alors que  $\mathbf{Q}$  est un *corps parfait*).