Mathématiques - DS n°4
Partie CUPGE

Exercice 1 :

1. (3 pts) Réssoudre dans les complexes :

$$z^2 - (7 - 8i)z - 3 - 27i = 0.$$

2. Soit f la rotation de centre d'affixe $2 + i$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et g l'homothétie de centre d'affixe $2 - i$ et de rapport 3.
   (a) (2 pts) Exprimer f et g sous la forme $z \mapsto az + b$, avec $a, b \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$.
   (b) (2 pts) Déterminer la similitude directe $g \circ f$. On donnera notamment son point fixe.
3. (3 pts) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que

$$\left|\frac{z+i}{z-i}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Exercice 2 :

1. (3 pts) Calculer les coéfficients de Bézout pour $\mathrm{pgcd}(9828, 8652)$.
2. Soit X l'ensemble des nombres premiers de la forme $4k + 3$ avec $k \in \mathbb{N}$.
   (a) (1 pt) Montrer que X est non vide.
   (b) (2 pts) Montrer que le produit de nombres de la forme $4k + 1$ est encore de cette forme.
   (c) (2 pts) On suppose que X est fini et on l'écrit alors $X = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Soit $a = 4p_1p_2 \cdots p_n - 1$. Montrer par l'absurde que a admet un diviseur premier de la forme $4k + 3$.
   (d) (2 pts) Montrer que ceci est impossible et donc que X est infini.

Exercice 3 : (4 pts) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = f(2x)$. Montrer que f est constante.

Exercice 4 : On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

1. (2 pts) Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier en $x = 0$.
2. (2 pts) Etudier l'existence de $f''(0)$.
3. On veut montrer que pour $x < 0$, la dérivée n-ième de f s'écrit

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{1/x},$$

   où P_n est un polynôme.
   (a) (1 pts) Trouver P_1 et P_2.
   (b) (2 pts) Trouver une relation de récurrence entre P_{n+1}, P_n et P'_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   (c) (2 pts) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.