Mathématiques - DS n°2

PARTIE CUPGE

Exercice 1 :

1. Montrer que si $f : X \to Y$ est une application avec Y fini, tel que tout $y \in Y$ a précisément k antécédants, alors X est fini de cardinal $k \cdot \#Y$.
2. Soit X un ensemble fini de cardinal n, et $p \leq n$ un entier.
   (a) Définir un *p-arrangement* et une *p-combinaison* d'éléments de X.
   (b) Donner (sans preuve) une formule pour le nombre de p-arrangements.
   (c) Soit f la fonction qui à tout p-arrangement d'éléments de X associe la p-combinaison de ses éléments. Calculer le nombre d'antécédants sous f d'une p-combinaison donnée.
   (d) En déduire le nombre total de p-combinaisons d'éléments de X. Une formule sans justification, même correcte, donne lieu à une déduction de points.

Exercice 2 : Soit X un ensemble, et $A, B, C \subseteq X$. On appelle *différence symétrique* de A et B l'ensemble $A \triangle B = \{x \in A \cup B : x \notin A \cap B\}$.

1. Montrer que $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ et que $A \triangle B = B \triangle A$.
2. Calculer $A \triangle A$, $A \triangle \emptyset$, $A \triangle X$ et $A \triangle (X \setminus A)$.
3. Montrer que $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.
4. (Bonus) En déduire que $(\mathcal{P}(X), \emptyset, \triangle)$ est un groupe commutatif.

Exercice 3 :

1. Montrer que la proposition suivante est vraie

$$P \leftrightarrow \big[(Q \to P) \wedge (R \to P) \wedge (P \vee Q \vee R)\big].$$

2. Soit $(u_n)_n$ une suite réelle.
   (a) Exprimer à l'aide de quantificateurs : S'il y a $b \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $-b \leq u_n \leq b$, alors il y a $\ell \in \mathbb{R}$ tel que pour tout entier $N > 0$ il y a $n \geq N$ avec $|\ell - u_n| \leq \frac{1}{N}$.
   (b) Former la négation de cet énoncé.
   (c) (Bonus) Reconnaissez-vous le théorème de la partie 2.(a) ?

Exercice 4 : On considère la fonction réelle

$$f : x \mapsto \ln(\cosh(x) - 1).$$

1. Donner le domaine de définition maximal.
2. Donner la parité de f. La fonction f est-elle périodique ?
3. Étudier les éventuelles limites de f aux bornes de son domaine maximal.
4. Calculer la fonction dérivée de f.
5. Donner le tableau de variations de f.
6. Calculer ses asymptôtes éventuelles.
7. Dresser le graphe de f.