Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre d'automne 2022-2023
Cursus prépa - Première année

Mathématiques - DS n°1
PARTIE CUPGE
Corrigé

<u>Exercice 1 :</u> On définit une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 1, \quad u_{2n} = u_n\,(u_{n-1} + u_{n+1}) \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = u_n^2 + u_{n+1}^2.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_{n+2} = u_n + u_{n+1}.$$

C'est la suite de *Fibonacci*.
[Indication. Quelle récurrence utiliser ? Faire une distinction par cas : a) Pour n petit (lesquels ?). b) Pour n pair. c) Pour n impair.]

Solution. Par récurrence forte. Soit $n \in \mathbb{N}$, et supposons $u_{k+2} = u_k + u_{k+1}$ pour tout entier $k < n$.

Cas 1. $n = 0$. Alors $u_2 = 1 = 0 + 1 = u_0 + u_1$. L'assertion est vraie.

Cas 2. $n > 0$ pair. Soit donc $n = 2k$ pour un entier k ; on note que $n > 0$ implique $0 \leq k - 1 < k < n$. Alors par hypothèse de récurrence forte $u_{k+1} = u_{k-1} + u_k$ et $u_{k+2} = u_k + u_{k+1}$. Donc

$$\begin{aligned} u_n + u_{n+1} &= u_{2k} + u_{2k+1} = u_k\,(u_{k-1} + u_{k+1}) + (u_k^2 + u_{k+1}^2) = u_k\,(u_{k-1} + u_k) + u_{k+1}(u_k + u_{k+1}) \\ &= u_k\,u_{k+1} + u_{k+1}\,u_{k+2} = u_{k+1}\,(u_k + u_{k+2}) = u_{2(k+1)} = u_{n+2}. \end{aligned}$$

Cas 3. $n > 0$ impair. Soit donc $n = 2k+1$ pour un entier k ; on note que $0 \leq k < n$. Alors par hypothèse de récurrence forte $u_{k+2} = u_k + u_{k+1}$. Donc

$$\begin{aligned} u_n + u_{n+1} &= u_{2k+1} + u_{2(k+1)} = (u_k^2 + u_{k+1}^2) + u_{k+1}\,(u_k + u_{k+2}) = u_k\,(u_k + u_{k+1}) + u_{k+1}^2 + u_{k+1}u_{k+2} \\ &= u_k\,u_{k+2} + u_{k+1}u_{k+2} + u_{k+1}^2 = (u_k + u_{k+1})\,u_{k+2} + u_{k+1}^2 = u_{k+2}^2 + u_{k+1}^2 = u_{2(k+1)+1} = u_{n+2}. \end{aligned}$$

D'après le principe de la récurrence forte, l'assertion est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

<u>Exercice 2 :</u> Évaluer la somme

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i^3}{j^2}.$$

On rappelle que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$ et $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2$.

Solution.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i^3}{j^2} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{i^3}{j^2} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2}\sum_{i=1}^{j} i^3 = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2}\left(\frac{j\,(j+1)}{2}\right)^2 = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j+1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\sum_{j=2}^{n+1} j^2 \\ &= \frac{1}{4}\Big(\big(\sum_{j=1}^{n+1} j^2\big) - 1\Big) = \frac{1}{4}\left(\frac{(n+1)\,(n+2)\,(2n+3)}{6} - 1\right) = \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n}{24} \end{aligned}$$

<u>Exercice 3 :</u> On considère la fonction réelle

$$f : x \mapsto \frac{x}{\tanh x}.$$

1. Donner le domaine de définition maximal.
2. Donner la parité de f. La fonction f est-elle périodique ?
3. Étudier les éventuelles limites de f aux bornes de son domaine maximal.
   [Il peut être utile de calculer $\lim_{x\to 0}\frac{1}{f}$.]
4. Calculer la fonction dérivée de f.

5. Calculer la fonction dérivée de

$$g : x \mapsto x \tanh^2 x - x + \tanh x.$$

En déduire les signes de f'.

6. Donner le tableau de variations de f.
7. Calculer ses asymptôtes éventuelles.
8. Dresser le graphe de f.

Solution.

1. tanh est défini sur $\mathbb{R}$ entier et ne s'annule qu'en 0. Donc le domaine maximal de définitin est $\mathbb{R}^*$.
2. $x \mapsto x$ est impair et tanh est impair, donc f est pair. En effet,

$$f(-x) = \frac{-x}{\tanh(-x)} = \frac{-x}{-\tanh(x)} = \frac{x}{\tanh(x)} = f(x).$$

Puisque $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (voir 3.), f ne peut pas être périodique.

3. $\lim_{x\to\pm\infty} \tanh(x) = \pm 1$. Donc $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$. De plus,

$$\lim_{x\to 0} 1/f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\tanh(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\tanh(0+x) - \tanh(0)}{x} = \tanh'(0) = 1 - \tanh^2(0) = 1.$$

Ainsi, $\lim_{x\to 0} f(x) = 1/\lim_{x\to 0} 1/f(x) = 1/1 = 1$.

4. D'après la formule pour la fonction dérivé d'un quotient, et avec la fonction $g(x)$ de la partie 5., on a

$$f'(x) = \frac{\tanh(x) - x(1 - \tanh^2(x))}{\tanh^2(x)} = \frac{\tanh(x) - x + x\tanh^2(x))}{\tanh^2(x)} = \frac{g(x)}{\tanh^2(x)}.$$

5.

$$g'(x) = \tanh^2(x) + x\,2\tanh(x)\,(1 - \tanh^2(x)) - 1 + 1 - \tanh^2(x) = 2x\tanh(x)\,(1 - \tanh^2(x)).$$

Or, $|\tanh(x)| < 1$ et $1 - \tanh^2(x) > 0$. De plus, $\tanh(x)$ et x ont même signe. Ainsi $g'(x) \geq 0$, avec $g'(x) = 0$ ssi $x = 0$. La fonction g est donc strictement croissante. Puisque $g(0) = 0$, on a $g(x) < 0$ pour $x < 0$, et $g(x) > 0$ pour $x > 0$. Enfin, $\tanh^2(x)$ est strictement positif, et $f'(x) = g(x)/\tanh^2(x)$. Ainsi $f'(x) < 0$ pour $x < 0$ et $f'(x) > 0$ pour $x > 0$.

6.

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x)$		$-$	|	$+$	
$f(x)$	∞	$\searrow$ 1	|	1 $\nearrow$	∞

7. On cherche une asymptote de la forme $y = ax + b$. On calcule :

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\tanh(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to\infty}\tanh(x)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{\tanh(x)} - x\right) = \lim_{x\to\infty} x\,\frac{1 - \tanh(x)}{\tanh(x)}$$

<u>**Exercice 4 :**</u> On considère la fonction réelle

$$f : x \mapsto \tanh^2 x.$$

1. Montrer que f est strictement croissante sur $[0, \infty[$.
2. Montrer que f, restreint à l'intervalle $[0, \infty[$ admet une fonction réciproque g, dont on précisera le domaine et l'ensemble d'arrivée.
3. Calculer une formule explicite pour g.

Solution.