Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence:

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n - (-1)^n n, \\ \quad u_0 = 0. \end{cases}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = (-1)^n u_n$. Donner une relation de récurrence portant sur la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire une expression de v_n en tant que somme de n termes.

3. Calculer la somme de la question précédente pour trouver une expression de v_n en fonction de n, pour tout n.

4. En déduire $u_n = (-1)^n(n^2 - n)/2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. On pose
$$u : \begin{cases} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longrightarrow & u_n. \end{cases}$$
La fonction u est-elle injective? Est-elle surjective?

Exercice 2. Soit les fonctions

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \dfrac{e^x}{1+x^2} \end{cases} \quad \text{et} \quad g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \ln(1+(x-1)^2). \end{cases}$$

1. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer si f a une limite en $-\infty$ et en $+\infty$, et calculer ces limites le cas échéant.

3. La fonction f est-elle injective? Est-elle surjective?

4. Établir le tableau de variations de g, en incluant les limites éventuelles en $-\infty$ et $+\infty$, et tracer le graphe de g.

5. On pose $h_1(x) = g \circ f(x)$. Établir le tableau de variations de h_1, en incluant les limites éventuelles en $-\infty$ et $+\infty$, et tracer le graphe de h_1.

6. On pose $h_2(x) = f(x)g(x)\cos(x)$. La fonction h_2 admet-elle une limite en $-\infty$? Admet-elle une limite en $+\infty$?

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, donner une expression de

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n} \exp\left(\sqrt{k} - \sqrt{k+1}\right)\right),$$

qui ne fasse intervenir ni somme ni produit.

Exercice 4.

1. Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose

$$D_N = \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad 0 \leq m \leq N \quad \text{et} \quad 0 \leq n \leq m\}.$$

   Dessiner l'ensemble D_2, puis l'ensemble D_N, pour tout $N \in \mathbb{N}$.

2. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on pose

$$U_N = \sum_{(n,m)\in D_N} nm^2,$$

   et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$S_k(N) = \sum_{n=0}^{N} n^k.$$

   Donner une expression de U_N en fonction des $S_k(N)$, pour certaines valeurs de k.

3. Donner l'expression de $a_N > 0$ tel que

$$\text{pour tout } (n,m) \in D_N, \quad nm^2 \leq a_N.$$

4. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, donner $b_N > 0$ tel que le nombre d'éléments de D_N soit inférieur à b_N.

5. Déduire des trois questions précédentes une valeur d'une constante $A > 0$ (indépendante de N) tel que

$$\text{pour tout } N \in \mathbb{N}, \quad U_N \leq AN^5.$$