Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2022-2023
Cursus préparatoire : Fondamentaux des Mathématiques 1 28 septembre 2022

Correction du devoir surveillé N°1

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence:

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n - (-1)^n n, \\ \quad u_0 = 0. \end{cases}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = (-1)^n u_n$. Donner une relation de récurrence portant sur la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de v_n, on a $u_n = (-1)^n v_n$. Donc, en substituant dans la définition de la suite (u_n), on obtient

$$(-1)^{n+1} v_{n+1} = -(-1)^n v_n - (-1)^n n,$$

c'est-à-dire, après multiplication par $(-1)^{n+1}$:

$$v_{n+1} = v_n + n, \tag{1}$$

qui est la relation de récurrence cherchée.

---

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire une expression de v_n en tant que somme de n termes.

On utilise (1) pour $n = 1$, puis $n = 2$, puis $n = 3$, pour trouver (puisque $u_0 = 0$):

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 0 + 1, \quad v_3 = 0 + 1 + 2,$$

si bien qu'on devine la relation

$$\text{pour tout } n \geqslant 1, \quad v_n = \sum_{k=0}^{n-1} k. \tag{2}$$

Preuve de (2) par récurrence:

- Avec $u_0 = 0$ et (1) pour $n = 0$, on trouve $v_1 = 0$.
- Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait (2). Alors, par (1),

  $$v_{n+1} = v_n + n,$$

  et donc par l'hypothèse de récurrence

  $$v_{n+1} = \sum_{k=1}^{n-1} k + n = \sum_{k=1}^{n} k.$$

- La récurrence est achevée.

---

3. Calculer la somme de la question précédente pour trouver une expression de v_n en fonction de n, pour tout n.

On utilise le résultat vu en TD:

$$v_n = \sum_{k=1}^{n-1} = \frac{1}{2}n(n-1),$$

qui se prouve par récurrence.

4. En déduire $u_n = (-1)^n(n^2 - n)/2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

À partir du résultat de la question précédente et de la définition de (v_n), on a

$$u_n = (-1)^n v_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{2}n(n-1),$$

qui est le résultat demandé.

5. On pose

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbf{Z} \\ n & \longrightarrow & u_n. \end{array} \right.$$

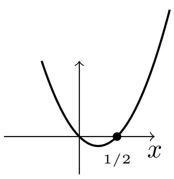
La fonction u est-elle injective? Est-elle surjective?

On a $u(0) = u_0 = u(1) = u_1 = 0$, si bien que u n'est pas injective.

La suite des termes pairs $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers positifs, et la suite des termes impairs $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers négatifs. Donc pour que u soit surjective sur $\mathbf{Z}$, il faut que la suite des termes pairs soit surjective sur $\mathbb{N}$. On a

$$u_{2n} = n(2n-1).$$

La fonction $x \to x(2x-1)$ est strictement croissante sur $[1/2, +\infty[$.



On a $u_0 = 0$, $u_2 = 1$. Donc la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. On remarque que $u_4 = 6$, et donc 4 n'est pas une valeur prise par la suite (u_{2n}) (2 n'appartient pas non plus à l'image de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$)), si bien que u n'est pas surjective.

Exercice 2

Soit les fonctions

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \dfrac{e^x}{1+x^2} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \ln(1+(x-1)^2). \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $1 + x^2 > 0$. On dérive en utilisant par exemple la règle de dérivation d'un produit:

$$f'(x) = e^x \frac{1}{1+x^2} + e^x \cdot \left(-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right),$$

et donc

$$f'(x) = \frac{e^x}{(1+x^2)^2} \cdot (1 + x^2 - 2x) = \frac{e^x}{(1+x^2)^2} \cdot (1-x)^2 \geqslant 0,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, si bien que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

En fait, $f' > 0$ sur $]-\infty, 1[$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty, 1[$, et $f' > 0$ sur $]1, +\infty[$, donc f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

Soit maintenant $(x, y) \in \mathbb{R}$, tels que $x < y$. Si x et y sont tous les deux dans $]-\infty, 1[$ ou dans $]1, +\infty[$, alors $f(x) < f(y)$ par croissante stricte sur chacun de ces intervalles. Sinon, on a $x < 1 < y$. Alors on peut trouver $x_0 \in]x, 1[$, et donc par croissante stricte de f dans $]-\infty, 1[$, on a $f(x) < f(x_0)$. Par ailleurs, par croissance de f sur $\mathbb{R}$, on a $f(x_0) \leqslant f(1) \leqslant f(y)$. Donc finalement $f(x) < f(y)$, et f est strictement croissante.

Si $x = 1$ ou $y = 1$, on peut répéter l'argument ci-dessus pour vérifier qu'on a encore $f(x) < f(y)$.

---

2. Déterminer si f a une limite en $-\infty$ et en $+\infty$, et calculer ces limites le cas échéant.

Par croissances comparées (exponentielle et polynôme),

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$

---

3. La fonction f est-elle injective? Est-elle surjective?

Soit $x \neq y$, par exemple $x < y$. Alors par croissance stricte, $f(x) < f(y)$, et donc $f(x) \neq f(y)$, si bien que f est injective.

Par ailleurs, f ne prend que des valeurs strictement positives, donc n'est pas surjective sur $\mathbb{R}$.

---

4. Établir le tableau de variations de g, en incluant les limites éventuelles en $-\infty$ et $+\infty$, et tracer le graphe de g.

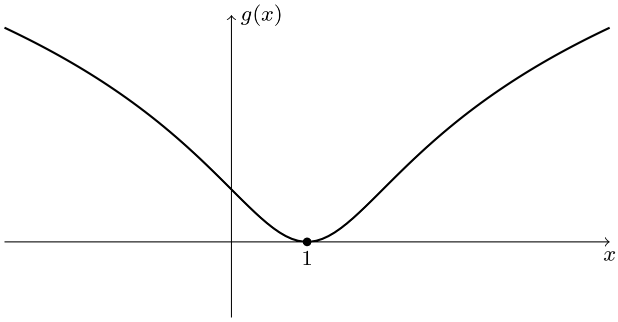
Comme $1 + (x-1)^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On calcule

$$g'(x) = \frac{2(x-1)}{1+(x-1)^2}.$$

Donc $g' < 0$ sur $]-\infty, 1[$, et $g' > 0$ sur $]1, +\infty[$. Quand x s'approche de $-\infty$ ou de $+\infty$, le polynôme $x \to 1 + (x-1)^2$ s'approche de $+\infty$, donc, par composition avec le logarithme, g aussi:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$

La fonction g décroit de $+\infty$ à $g(1) = 0$ sur $]-\infty, 1]$ puis croit de 0 à $+\infty$ sur $[1, +\infty[$. On remarque que $g'(1) = 0$, si bien que le graphe de g a une tangente horizontale (l'axe des abcisses) en $x = 1$.



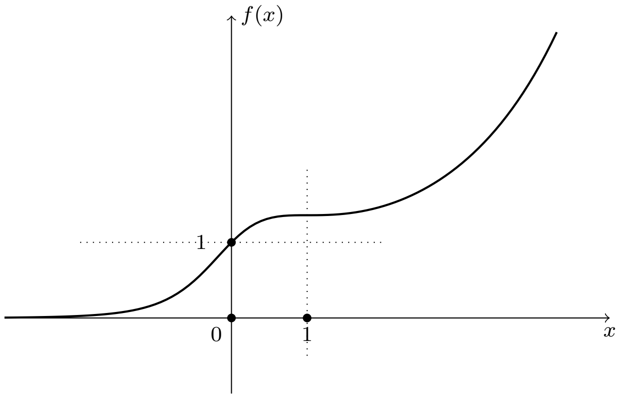
---

5. On pose $h_1(x) = g \circ f(x)$. Établir le tableau de variations de h_1, en incluant les limites éventuelles en $-\infty$ et $+\infty$, et tracer le graphe de h_1.

La fonction h_1 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et par dérivation des fonctions composées:

$$h_1'(x) = g'(f(x))f'(x),$$

si bien que le signe de $h_1'(x)$ est donné par le signe de $g'(f(x))$. La fonction f est à valeurs dans $]0, +\infty[$ et est strictement croissante. Comme f est continue, et que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 1$. Par monotonie de f, on a $f(x) < 1$ pour $x < x_0$ et $f(x) > 1$ pour $x > x_0$. Donc h_1 est strictement décroissante sur $]-\infty, x_0[$ et strictement croissante sur $]x_0, +\infty[$. On remarque que $f(0) = 1$, si bien que $x_0 = 1$.



Pour $x < 0$, on a $f(x) < 1$, et donc $g'(f(x)) < 0$, et donc $h_1'(x) < 0$. Pour $x > 0$ on a $f(x) > 1$, et donc $g'(f(x)) > 0$ si bien que $h_1'(x) > 0$.

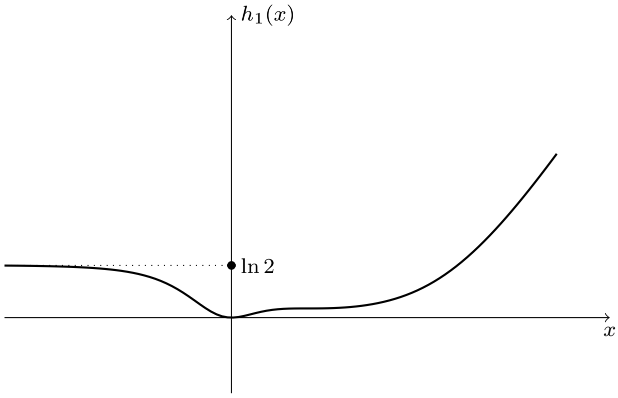
Par ailleurs, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, donc par composition des limites:

$$\lim_{x\to+\infty} h_1(x) = +\infty.$$

On a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, et $g(0) = \ln 2$, donc par composition des limites

$$\lim_{x\to-\infty} h_1(x) = \ln 2.$$

Comme $f'(1) = 0$, on a $h_1'(1) = 0$, et donc le graphe de h_1 a une tangente horizontale en $x = 1$. De plus, comme $g'(1) = 0$, et $f(0) = 1$, on a $h_1'(0) = 0$, et donc le graphe de h_1 a aussi une tangente horizontale en $x = 0$.



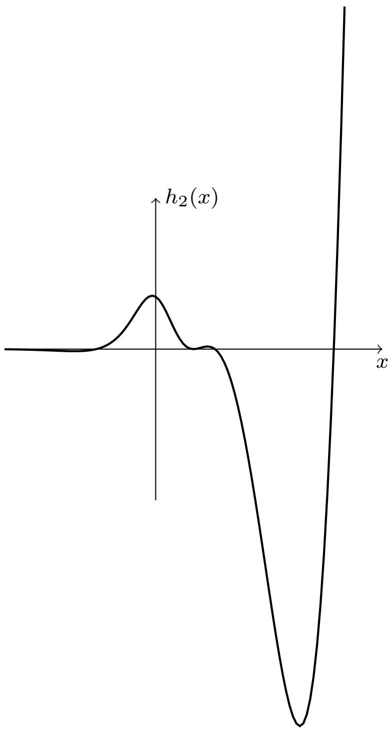
---

6. On pose $h_2(x) = f(x)g(x)\cos(x)$. La fonction h_2 admet-elle une limite en $-\infty$? Admet-elle une limite en $+\infty$?

En $-\infty$, par croissances comparées, la fonction fg tend vers 0, et donc

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)g(x)\cos(x) = 0.$$

En $+\infty$, la fonction fg tend vers $+\infty$. Comme cos n'a pas de limite en $+\infty$ et oscille continument entre -1 et 1, cela implique que la fonction h_2 prend de grandes valeurs positives et de grandes valeurs négatives quand $x \to +\infty$. En particulier, h_2 n'a pas de limite en $+\infty$.



Exercice 3

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, donner une expression de

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n} \exp\left(\sqrt{k} - \sqrt{k+1}\right)\right),$$

qui ne fasse intervenir ni somme ni produit.

On pose

$$u_k = \exp\left(\sqrt{k} - \sqrt{k+1}\right).$$

Par propriété du logarithme,

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n} u_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(u_k).$$

Par propriété de l'exponentielle,

$$\ln(u_k) = \sqrt{k} - \sqrt{k+1}.$$

Donc l'expression cherchée est

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k} - \sqrt{k+1}\right).$$

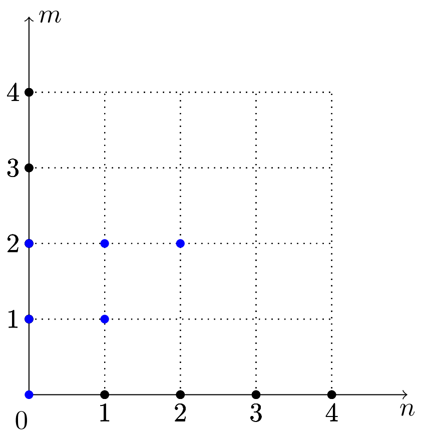
On reconnait une suite téléscopique, et

$$U_n = \sqrt{1} - \sqrt{n+1}.$$

Exercice 4

1. Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose
$$D_N = \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant m \leqslant N \quad \text{et} \quad 0 \leqslant n \leqslant m\}.$$
Dessiner l'ensemble D_2, puis l'ensemble D_N, pour tout $N \in \mathbb{N}$.

L'ensemble D_N est une partie de $\mathbb{N}^2$. On décide que l'axe des abscisses est l'axe des n et l'axe des ordonnées est l'axe des m. Changer les rôles de n et m revient à faire une symétrie par rapport à la diagonale $n = m$ dans le plan.



L'ensemble des points qui composent D_2 est dessiné en bleu ci-dessus. Pour D_N, pour toute valeur de N, on a de la même manière un triangle rectangle au-dessus de la diagonale $n = m$.

---

2. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on pose
$$U_N = \sum_{(n,m) \in D_N} nm^2,$$
et pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$S_k(N) = \sum_{n=0}^{N} n^k.$$
Donner une expression de U_N en fonction des $S_k(N)$, pour certaines valeurs de k.

On somme d'abord suivant n puis suivant m, c'est-à-dire suivant les segments horizontaux de D_N. Cela donne
$$U_N = \sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1}^{m} nm^2 = \sum_{m=1}^{N} m^2 \left(\sum_{n=1}^{m} n \right).$$
On calcule par récurrence (ou on utilise la formule vue en TD):
$$\sum_{n=1}^{m} n = \frac{1}{2} m(m+1).$$
Donc
$$U_N = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{N} m^3(m+1) = \frac{1}{2} \left(\sum_{m=1}^{N} m^3 + \sum_{m=1}^{N} m^4 \right),$$
si bien que
$$U_N = \frac{1}{2} \left(S_3(N) + S_4(N) \right).$$

3. Donner l'expression de $a_N > 0$ tel que

$$\text{pour tout } (n,m) \in D_N, \quad nm^2 \leqslant a_N.$$

Pour tout $(n,m) \in D_N$, on a $0 \leqslant m \leqslant N$ et $0 \leqslant n \leqslant m$. Donc $n \leqslant N$, et

$$nm^2 \leqslant N \cdot N^2 = N^3,$$

si bien que $a_N = N^3$ convient.

4. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, donner $b_N > 0$ tel que le nombre d'éléments de D_N soit inférieur à b_N.

Le triangle D_N est inclus dans le carré $[0,N] \times [0,N]$, qui contient $(N+1) \cdot (N+1) = (N+1)^2$ points dont les coordonnées sont entières. Donc il y a moins de $(N+1)^2$ éléments dans D_N, si bien que $b_N = (N+1)^2$ convient.

5. À partir des trois questions précédentes, donner la valeur d'une constante $A > 0$ (indépendante de N) tel que

$$\text{pour tout } N \in \mathbb{N}, \quad U_N \leqslant AN^5.$$

Par la question 3,

$$U_N \leqslant \sum_{\substack{(n,m)\in D_N \\ nm\neq 0}} N^3 = N^3 \sum_{\substack{(n,m)\in D_N \\ nm\neq 0}} 1,$$

et la somme $\sum_{\substack{(n,m)\in D_N \\ nm\neq 0}} 1$ est égale au nombre déléments à coordonnées strictement positives dans D_N. Ces couples (n,m) de D_N tels que $n \neq 0$ et $m \neq 0$ sont tous dans le carré $[1,N] \times [1,N]$, qui a N^2 éléments. Donc

$$\sum_{\substack{(n,m)\in D_N \\ nm\neq 0}} 1 \leqslant N^2,$$

si bien que

$$U_N \leqslant N^3 \cdot N^2 = N^5.$$

Donc $A = 1$ convient.