Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre d'automne 2021-2022

Cursus prépa - Première année

Fondamentaux des mathématiques - DS n°4

PARTIE CUPGE

Si vous ne réussissez pas à faire une partie d'un exercice, vous pouvez passer aux suivantes en assumant le résultat. Les parties (*) nécessitent un calcul plus poussé.

Exercice 1 :

1. Donner toutes les solutions de la congruence $42\,x \equiv 56 \mod 91$.
2. Calculer $\text{pgcd}(1819, 2380)$ et trouver des coefficients de Bézout.

Exercice 2 : On considère la fonction réelle

$$f(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right).$$

1. Donner le domaine maximal D de f.
2. Montrer que $f(x) + f(-x) = 1$ pour tout $x \in D$. Qu'est-ce que cela signifie géométriquement ?
3. Calculer les limites de f en $\pm\infty$.
4. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$, ainsi que la fonction dérivée de $\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$.
5. (*) Montrer que f possède un prolongement continue $\bar{f}$ défini sur $\mathbb{R}$.
   [Indication : Utiliser la règle de l'Hôpital à plusieurs reprises.]
6. Calculer la fonction dérivée de f.
7. Montrer que f' est du signe de
$$g(x) = -\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) + \frac{x\,e^x}{e^x-1} - 1.$$
8. (*) Vérifier que
$$g'(x) = \frac{\sinh^2\frac{x}{2} - \left(\frac{x}{2}\right)^2}{x\sinh^2\frac{x}{2}}.$$
9. Montrer que $\sinh x > x$ pour tout $x > 0$. En déduire que $g'(x) > 0$ pour $x > 0$.
10. Vérifier que $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. En déduire que $g(x) > 0$ pour $x > 0$.
11. Donner la table de variations de f.
12. (*) Montrer que le prolongement $\bar{f}$ de f en 0 est dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 3 :

1. Soit P un polynôme réel de degré $n > 0$. Quel est le degré de P' ?
2. Trouver tous les polynômes réels tels que $P(2X) = P'(X)\,P''(X)$.

Exercice 4 : Soit $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \in \mathbb{C} : \ a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que si α et β sont dans $\mathbb{Z}[i]$ alors $\alpha \pm \beta$ et $\alpha\beta$ le sont aussi.
2. Montrer que pour $\alpha \in \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\}$ on a $|\alpha| \geq 1$, avec égalité ssi $\alpha \in \{\pm 1, \pm i\}$.
3. Trouver les élements inversibles de $\mathbb{Z}[i]$, c'est-à-dire les éléments $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ tels qu'il existe $\beta \in \mathbb{Z}[i]$ avec $\alpha\beta = 1$.
4. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ il existe $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $|z - \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.
5. Montrer qu'il existe sur $\mathbb{Z}[i]$ une division euclidienne, c'est-à-dire que, quels que soient α et β dans $\mathbb{Z}[i]$ il existe q et r dans $\mathbb{Z}[i]$ vérifiant : $\alpha = \beta q + r$ avec $|r| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}|\beta|$.
   [Indication : on pourra considérer $z = \frac{\alpha}{\beta}$.]
6. (*) Montrer que dans $\mathbb{Z}[i]$ il existe un algorithme d'Euclide.