Université Claude Bernard - Lyon 1, Semestre d'automne 2021-2022
Cursus préparatoire : Fondamentaux des Mathématiques 1
17 Novembre 2021

Devoir surveillé N°3
Durée : 1h30
Corrigé

Exercice 1. *Soit α un réel > 0 et $(a_n)_n$ la suite definie par recurrence:*

$$a_0 = \alpha, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2 + a_n} \qquad \text{pour } n \geq 0.$$

a) Etudier la monotonie de $(a_{2n})_n$ et $(a_{2n+1})_n$.
b) Calculer le point fixe ℓ de $f(x) = 1/(2 + x)$.
c) Montrer que $a_n > \ell$ si et seulement si $0 < a_{n+1} < \ell$.
d) En déduire que $(a_n)_n$ converge.

Solutions. *D'abord on remarque que $\alpha > 0$ implique $a_n > 0$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$.*
a) On a

$$a_{2(n+1)} = f(f(a_{2n}) \quad \text{et} \quad a_{2(n+1)+1} = f(f(a_{2n+1}),$$

du coup fin de etudier la monotonie de ces suites extraites il faut considerer la fonction composée $f \circ f$, on a

$$f(f(x)) = f\left(\frac{1}{2+x}\right) = \frac{1}{2 + \frac{1}{2+x}} = \frac{2+x}{5+2x},$$

or pour la monotonie

$$a_{2n} < \frac{2 + a_{2n}}{5 + 2a_{2n}} \Longleftrightarrow 2a_{2n}^2 + 4a_{2n} - 2 < 0,$$

et

$$a_{2n}^2 + 2a_{2n} - 1 = 0 \Longleftrightarrow a_{2n} = -1 - \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad a_{2n} = -1 + \sqrt{2},$$

du coup

$$a_{2n} < a_{2(n+1)} \Longleftrightarrow 0 < a_{2n} < \sqrt{2} - 1,$$

et on a la même relation pour $(a_{2n+1})_n$.
b) Le point fixe ℓ verifie $f(\ell) = \ell$, cet à dire

$$\ell = \frac{2+\ell}{5+2\ell},$$

qui nous donne $\ell = \sqrt{2} - 1$ (car on s'interesse à la solution > 0).
c) On veut verifier que

$$a_n > \sqrt{2} - 1 \Longleftrightarrow a_{n+1} = \frac{1}{2 + a_n} < \sqrt{2} - 1,$$

et tout à fait on a

$$\frac{1}{2 + a_n} < \sqrt{2} - 1 \Longleftrightarrow (\sqrt{2} - 1)a_n > 3 - 2\sqrt{2} \Longleftrightarrow a_n > \frac{3 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} - 1,$$

on en deduit que pour $\alpha > 0$ et $\alpha \neq \sqrt{2} - 1$ les termes de la suite sont sont alternativement majeurs et mineurs de ℓ.
d) On peut en deduire, en utilisant aussi le resultat trouvé en b), que, si $\alpha < \ell$, tous les termes de $(a_{2n})_n$ sont compris entre 0 et l et que cette suite extraite est croissante, tandis que tous les termes de $(a_{2n+1})_n$ sont plus grands que ℓ et que cette suite extraite est decroissante. Dans les deux cas on a une suite bornée et monotone qui donc converge vers le point fixe ℓ de f. c) nous dit que si $\alpha > l$ on obtient le même resultat mais avec le roles de $(a_{2n})_n$ et $(a_{2n+1})_n$ exchangé, et finalement si $\alpha = \ell = \sqrt{2} - 1$ la suite est constante et du coup banalement convergente.

Exercice 2. *1) Calculer les puissances* z^2, z^6 *et* z^{22} *avec* $z = \frac{2}{\sqrt{3}-i} + \frac{1}{i}$.
2) Resoudre dans les nombres complexes les equations

a) $z^6 + i\bar{z}^3 = 0$, *b)* $z^2 + 2iz - 3 + 2\sqrt{3}i = 0$.

Solutions. *1) On a*

$$z = \frac{2}{\sqrt{3}-i} + \frac{1}{i} = \frac{2(\sqrt{3}+i)}{3-i^2} - i = \frac{\sqrt{3}+i}{2} - i = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i,$$

pour calculer les puissances on cherche la forme exponentielle $z = re^{i\theta}$.

$$r = |z| = \frac{1}{2}\sqrt{3+1} = 1, \quad \begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{11}{6}\pi \ ,$$

du coup $z = e^{11\pi i/6}$. *Alors on a*

$$\begin{aligned} z^2 &= e^{11\pi i/3} = e^{5\pi i/3} = \cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ z^6 &= e^{11\pi i} = \cos(11\pi) + i\sin(11\pi) = -1, \\ z^{22} &= e^{121\pi i/3} = e^{\pi i/3} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

2) a) On peut ecrire $z^6 = -i\bar{z}^3$ *et prendre le module de le deux cotés*

$$\left|z^6\right| = \left|-i\bar{z}^3\right| \Rightarrow \left|z^6\right| = |-i| \cdot \left|(\bar{z})^3\right| \Rightarrow \left|z^6\right| = 1 \cdot |\bar{z}|^3 \Rightarrow \left|z^6\right| = \left|z^3\right|,$$

du coup $|z| = 0$ *ou* $|z| = 1$. *Dans le premier cas on trouve la solution* $z = 0$, *dans le deuxieme on peut ecrire*

$$z^6 = -i\bar{z}^3 \Rightarrow z^6 \cdot z^3 = -i(\bar{z})^3 \cdot z^3 \Rightarrow z^9 = -i(z \cdot \bar{z})^3 \Rightarrow z^9 = -i\left(|z|^2\right)^3 \Rightarrow z^9 = -i \cdot 1 \Rightarrow z^9 = -i.$$

Il s'agit donc de calculer les racines 9-ièmes de $-i$*:*

$$\begin{aligned} z_k = \sqrt[9]{|-i|}\left[\cos\left(\frac{-\pi/2 + 2k\pi}{9}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{-\pi/2 + 2k\pi}{9}\right)\right] = \\ = \cos\left(\frac{-\pi/2 + 2k\pi}{9}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{-\pi/2 + 2k\pi}{9}\right) \quad \text{avec } k = 0, \ldots, 8. \end{aligned}$$

b) Avec la formule classique on trouve

$$z_{1,2} = -i \pm \sqrt{2 - 2\sqrt{3}i},$$

on a

$$2 - 2\sqrt{3}i = 4\left[\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{3}\pi\right)\right]$$

du coup une racine carré de $(2 - 2\sqrt{3}i)$ *est donnée par*

$$r = \sqrt{4}\left[\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{2}\pi\right)\right] = 2\left[\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right] = -\sqrt{3} + i,$$

et on obtient ainsi

$$\begin{aligned} z_1 &= -i + r = -i + (-\sqrt{3} + i) = -\sqrt{3} \\ z_2 &= -i - r = -i + (\sqrt{3} - i) = \sqrt{3} - 2i. \end{aligned}$$

Exercice 3. *Soit f la fonction definie par*

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-x-6}$$

1) Donner l'ensemble de definition de f, etudier les limites de f dans les extremes de cet ensemble et trouver les asymptotes s'ils existent.
2) Calculer f' et déterminer son signe.
3) En déduire le tableau de variations de f.
4) Tracer le graphe de f.

Solutions. *1) Afin que la fonction soit definie il faut que le denominateur soit pas egal à 0, $x^2-x-6=0$ si et seulement si $x=-2$ ou $x=3$ du coup on trouve l'ensemble de definition $\mathbb{R}\setminus\{-2,3\}=(\infty,-2)\cup(-2,3)\cup(3,+\infty)$. Pour les limites on trouve*

$$\lim_{x\to -2^{\pm}} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to 3^{\pm}} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0,$$

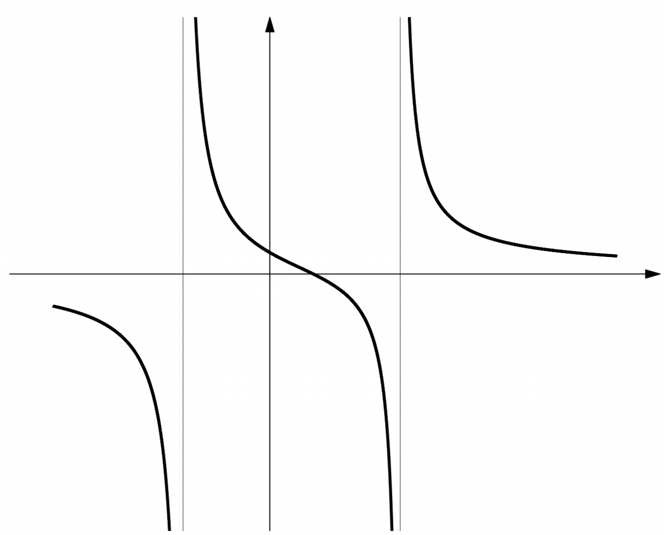
du coup $x=-2$ et $x=3$ sont des asymptotes verticaux et $y=0$ est un asymptote horizontal.
2) On trouve

$$f'(x) = -\frac{x^2-2x+7}{(x^2-x-6)^2},$$

du coup son signe est toujours negatif car $x^2-2x+7>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$.
3) On a alors le tableau de variations suivant

t	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
	0		$\pm\infty$		$\pm\infty$		0
$f(t)$		$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$	
$f'(t)$		$-$		$-$		$-$	

4)



Exercice 4. *Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que*

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad f(x+y)=f(x)+f(y),$$

Montrer que
a) $\forall n\in\mathbb{N} \quad f(n)=n\cdot f(1)$.
b) $\forall n\in\mathbb{Z} \quad f(n)=n\cdot f(1)$.
c) $\forall q\in\mathbb{Q} \quad f(q)=q\cdot f(1)$.
d) $\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)=x\cdot f(1)$ *si f est croissante.*

Solutions. *a) Calculons d'abord $f(0)$. Nous savons $f(1)=f(1+0)=f(1)+f(0)$, donc $f(0)=0$. Montrons le résultat demandé par récurrence : pour $n=1$, nous avons bien $f(1)=1\cdot f(1)$. Si $f(n)=nf(1)$ alors $f(n+1)=f(n)+f(1)=nf(1)+f(1)=(n+1)f(1)$.*
b) $0=f(0)=f(-1+1)=f(-1)+f(1)$. Donc $f(-1)=-f(1)$. Puis comme ci-dessus $f(-n)=nf(-1)=-nf(1)$.
c) Soit $q=\frac{a}{b}$. Alors $f(a)=f\left(\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\cdots+\frac{a}{b}\right)=f\left(\frac{a}{b}\right)+\cdots+f\left(\frac{a}{b}\right)$ (b termes dans ces sommes). Donc $f(a)=bf\left(\frac{a}{b}\right)$. Soit $af(1)=bf\left(\frac{a}{b}\right)$. Ce qui s'écrit aussi $f\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{a}{b}f(1)$.
d) Fixons $x\in\mathbb{R}$ et utilisons la densité des rationnels dans $\mathbb{R}$: Soient (α_i) une suite croissante de rationnels qui tend vers x et (β_i) une suite décroissante de rationnels qui tend vers x :

$$\alpha_1\le\alpha_2\le\alpha_3\le\ldots\le x\le\cdots\le\beta_2\le\beta_1.$$

Alors comme $\alpha_i\le x\le\beta_i$ et que f est croissante nous avons $f(\alpha_i)\le f(x)\le f(\beta_i)$. D'après la question précédent cette inéquation devient : $\alpha_i f(1)\le f(x)\le\beta_i f(1)$. Comme (α_i) et (β_i) tendent vers x. Par le "théorème des gendarmes"nous obtenons en passant à la limite :

$$xf(1)\le f(x)\le xf(1).$$

Soit $f(x)=xf(1)$.

Exercice 5. *On considère les mains de 5 cartes que l'on peut extraire d' un jeu de 52 cartes.*
1) Combien y a-t-il de mains différentes ?
2) Combien y a-t-il de mains comprenant exactement un as?
3) Combien y a-t-il de mains comprenant au moins un valet?
4) Combien y a-t-il de mains comprenant (à la fois) au moins un roi et au moins une dame?
(Rappel: Dans un jeu de 52 cartes il y a 4 "couleurs" (pique, cœur, carreau, trèfle) et 13 "valeurs" (1 = As, 2,3,...,10, Valet, Dame, Roi). Une "main" c'est un choix de 5 cartes parmi les 52, l'ordre du choix n'important pas.)

Solutions. *1) Il s'agit donc de choisir 5 cartes parmi 52 : il y a donc $\binom{52}{5}$ mains différentes. Ceci peut être calculé : $\binom{52}{5}=\frac{52\cdot51\cdot50\cdot49\cdot48}{5!}=2598960$.*
2) Il y a 4 choix pour l'as (l'as de pique ou l'as de cœur ou ...), puis il faut choisir les 4 cartes restantes parmi 48 cartes (on ne peut pas rechoisir un as). Bilan $4\cdot\binom{48}{4}$ mains comprenant exactement un as.
3) Il est plus facile de compter d'abord les mains qui ne contiennent aucun valet: il faut choisir 5 cartes parmi 48 (on exclut les valets); il y a donc $\binom{48}{5}$ mains ne contenant aucun valet. Les autres mains sont les mains qui contiennent au moins un valet: il y en a donc $\binom{52}{5}-\binom{48}{5}$.
4) Nous allons d'abord compter le nombre de mains que ne contiennent pas de roi ou pas de dame. Le nombre de mains qui ne contiennent pas de roi est $\binom{48}{5}$ (comme la question 3). Le nombre de mains qui ne contiennent pas de dame est aussi $\binom{48}{5}$. Le nombre de mains ne contenant pas de roi ou pas de dame n'est pas $\binom{48}{5}+\binom{48}{5}$, car on aurait compté deux fois les mains ne contenant ni roi, ni dame (il y a $\binom{44}{5}$ telles mains). Le nombre de mains ne contenant pas de roi ou pas de dame est donc : $2\binom{48}{5}-\binom{44}{5}$ (on retire une fois les mains comptées deux fois). Ce que nous cherchons ce sont toutes les autres mains : celles qui contiennent au moins un roi et au moins une dame. Leur nombre est donc : $\binom{52}{5}-2\binom{48}{5}+\binom{44}{5}$.
