Fondamentaux des mathématiques - DS n°2
Partie CUPGE
Corrigé

Exercice 1 : Pour une relation R sur un ensemble X, soit $\bar{R}$ la relation définie par $x\bar{R}y$ ssi (xRy ou yRx).

1. Soit R la relation sur $\mathbb{R}$ donnée par : xRy s'il y a $n \in \mathbb{N}$ avec $y = x + n$.
   (a) Déterminer si R est une relation d'ordre, d'ordre strict, ou d'équivalence.
   (b) Montrer que $x\bar{R}y$ ss'il y a $z \in \mathbb{Z}$ avec $y = x + z$. En déduire que $\bar{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Soit maintenant R une relation d'ordre sur un ensemble X.
   (a) On suppose que pour tout $x, y \in X$, s'il y a $z \in X$ avec (xRz et yRz) ou (zRx et zRy) alors $x\bar{R}y$. Montrer que $\bar{R}$ est transitive. En déduire que $\bar{R}$ est une relation d'équivalence.
   (b) Trouver un exemple d'un ordre R sur un ensemble X pour lequel $\bar{R}$ n'est pas une relation d'équivalence. [On remarquera que l'ordre ne peut être total.]

Solution :

1. (a) On a $0 \in \mathbb{N}$ et $x + 0 = x$, d'où xRx pour tout x, et R est reflexive. Si xRy et yRx, alors il y a $n \in \mathbb{N}$ avec $y = x+n$, et $m \in \mathbb{N}$ avec $x = y+m$. Mais alors $n = y-x = -m \in N$, ce qui implique $n = m = 0$ et $x = y$. Ainsi R est antisymétrique. Enfin, si xRy et yRz soient $m, n \in \mathbb{N}$ avec $y = x + m$ et $z = y + n$. Alors $z = x + (m + n)$ avec $m + n \in \mathbb{N}$, et xRz. Ainsi R est transitive, et on a bien une relation d'ordre (faible).
   (b) On a $x\bar{R}y$ s'il y a $n \in \mathbb{N}$ tel que $y = x + n$ ou $x = y + n$, donc ssi il y a $z \in \mathbb{Z}$ avec $y = x + z$. Puisque xRx pour tout x, on a aussi $x\bar{R}x$ pour tout x et $\bar{R}$ est reflexive. On note que $\bar{R}$ est symétrique par définition. Enfin, si $x\bar{R}y$ et $y\bar{R}z$, soient $m, n \in \mathbb{Z}$ avec $y = x + m$ et $z = y + n$. Alors $z = x + (m + n)$ avec $m + n \in \mathbb{Z}$, et $x\bar{R}z$. Ainsi $\bar{R}$ est transitive, et $\bar{R}$ est une relation d'équivalence.
2. (a) On a xRx pour tout x, d'où$x\bar{R}x$ pour tout x et $\bar{R}$ est reflexive. De plus, $\bar{R}$ est symétrique par définition. Soient donc $x\bar{R}y$ et $y\bar{R}z$. Si $xRyRz$ ou $zRyRx$, alors xRz ou zRx, d'où $x\bar{R}z$. Sinon, on a (xRy et zRy) ou (zRx et zRy). Alors par hypothèse $x\bar{R}z$. Dans tous les cas $x\bar{R}z$, et $\bar{R}$ est transitive : on a bien une relation d'équivalence.
   (b) On pose $X = \{a, b, c\}$ avec aRa, bRb, cRc, aRb et cRb. C'est un ordre partiel où a et c sont pus petits que b, mais incomparables entre eux. Alors tous les éléments sont liés par $\bar{R}$ sauf a et c. Puisque $a\bar{R}b\bar{R}c$, on a que $\bar{R}$ n'est pas transitive : ce n'est pas une relation d'équivalence.

Exercice 2 : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle donnée par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n\,(1 + \ln \frac{e}{u_n})$.

1. (Question de cours) Montrer que $1 + \ln x \leq x$ pour $x > 0$.
2. Montrer que $0 < \frac{u_n}{e} \leq \frac{u_{n+1}}{e} \leq 1$ pour tout n.
3. En déduire que u_n converge.
4. Trouver le point fixe de $f(x) = x\,(1 + \ln \frac{e}{x})$, c'est-à-dire $x_0 \in \mathbb{R}$ avec $f(x_0) = x_0$.
5. En déduire la valeur de $\lim_{n\to\infty} u_n$.
6. (Bonus) Montrer que $\ln \frac{e}{u_{n+1}} \leq (\ln \frac{e}{u_n})^2$. En déduire que $\lim_{n\to\infty} \ln u_n = 1$. [On a $\ln 2 > 0,69$.]

Solution :

1. On pose $f(x) = x-1-\ln x$. Alors f est défini et dérivable sur $]0, \infty[$, avec $f'(x) = 1-\frac{1}{x}$. Ainsi $f'(x) \leq 0$ pour $0 < x \leq 1$ et $f'(x) \geq 0$ pour $x \geq 1$. Donc f a son minimum pour $x = 1$, avec $f(1) = 1-1-0 = 0$. Il en découle que $f(x) \geq 0$ et $1 + \ln x \leq x$ pour $x > 0$.

2. Par récurrence sur n. **Initialisation :** On a $0 < 2 < e$, d'où $0 < \frac{2}{e} = \frac{u_0}{e} \leq 1$.
Hypothèse : Supposons $0 < u_n/e \leq 1$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.
Hérédité : D'après la partie 1. on a $1 + \ln \frac{e}{u_n} \leq e/u_n$, d'où :

$$\frac{u_{n+1}}{e} = \frac{u_n\,(1 + \ln \frac{e}{u_n})}{e} \leq \frac{u_n}{e}\,\frac{e}{u_n} = 1.$$

De plus, $0 < u_n/e \leq 1$ implique $\ln(e/u_n) \geq 0$, et $u_{n+1}/e = u_n\,(1 + \ln(e/u_n)) \geq u_n/e$.
L'énonce est donc démontré.

3. On a une suite croissante et majoré par e ; elle est convergente d'après le théorème de la suite monotone.
4. Si $x_0 = f(x_0) = x_0\,(1 + \ln \frac{e}{x_0})$, alors $\ln \frac{e}{x_0} = 0$ et $x_0 = e$. C'est l'unique point fixe.
5. On a $\ell = \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(\lim_{n\to\infty} u_n) = f(\ell)$ puisque f est continue sur $]0, \infty[$. Donc $\ell = e$ et $(u_n)_n$ converge vers e.
6. D'après 1. on a $\ln(1 + x) \leq x$ pour $x > -1$. Alors, en posant $x = \frac{-\ln(e/u_n)}{1+\ln(e/u_n)} > -1$, on a :

$$\begin{aligned}
\ln \frac{e}{u_{n+1}} &= \ln \frac{e}{u_n\,(1 + \ln \frac{e}{u_n})} = \ln \frac{e}{u_n} + \ln \frac{1}{1 + \ln \frac{e}{u_n}} = \ln \frac{e}{u_n} + \ln \frac{(1 + \ln \frac{e}{u_n}) - \ln \frac{e}{u_n}}{1 + \ln \frac{e}{u_n}} \\
&= \ln \frac{e}{u_n} + \ln \Big(\frac{1 + \ln \frac{e}{u_n}}{1 + \ln \frac{e}{u_n}} - \frac{\ln \frac{e}{u_n}}{1 + \ln \frac{e}{u_n}}\Big) = \ln \frac{e}{u_n} + \ln \Big(1 - \frac{\ln \frac{e}{u_n}}{1 + \ln \frac{e}{u_n}}\Big) \\
&\leq \ln \frac{e}{u_n} - \frac{\ln \frac{e}{u_n}}{1 + \ln \frac{e}{u_n}} = \Big(\ln \frac{e}{u_n}\Big)\Big(1 - \frac{1}{1 + \ln \frac{e}{u_n}}\Big) = \Big(\ln \frac{e}{u_n}\Big)\frac{\ln \frac{e}{u_n}}{1 + \ln \frac{e}{u_n}} \\
&= \Big(\ln \frac{e}{u_n}\Big)^2 \frac{1}{1 + \ln \frac{e}{u_n}} \leq \Big(\ln \frac{e}{u_n}\Big)^2.
\end{aligned}$$

Ainsi $0 \leq \ln \frac{e}{u_n} \leq (\ln \frac{e}{u_0})^{2^n} = (1 - \ln u_0)^{2^n} \leq 0,31^{2^n}$, ce qui converge vers 0. Donc $\ln u_n$ converge vers 1, et u_n converge vers e.

<u>**Exercice 3 :**</u> Étudier la fonction

$$x \mapsto \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

(Donner son domaine maximal, sa parité ou périodicité éventuelle, étudier sa continuité et dérivabilité, ses limites à $\pm\infty$ et aux bornes de son domaine, ses asymptotes affines éventuelles, son tableau des variations, et dresser son graphe.)

Solution : Pour que la racine carrée soit définie est strictement positive, il faut $\frac{x+1}{x-1} > 0$, donc numérateur et dénominateur de même signe. Ainsi $x \in]-\infty, 1[\cup]1, \infty[= D$, ce qui est le domaine maximal de f. On a

$$f(-x) = \ln \sqrt{\frac{-x+1}{-x-1}} = \ln \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = -\ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = -f(x)\,;$$

la fonction f est donc impaire. Pour la fonction dérivée, on calcule :

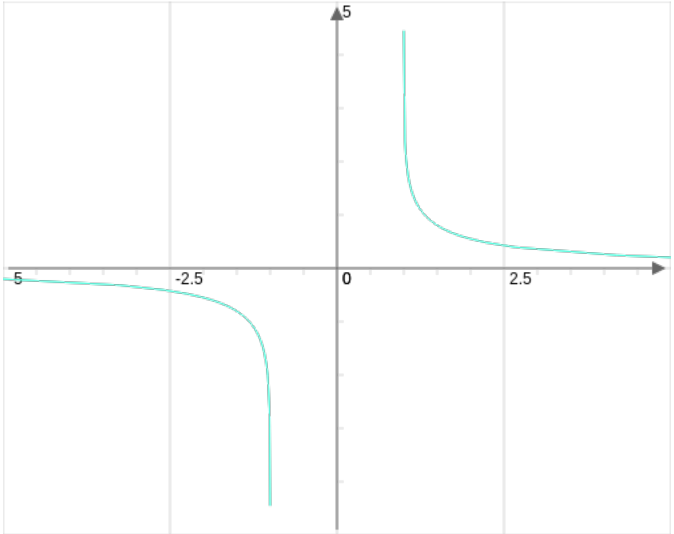
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}\,\frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}\,\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x+1)(x-1)} = \frac{-1}{x^2-1}.$$

La fonction f est ainsi dérivable, donc continue, sur D. On note que $f' < 0$ sur D. Ceci implique que f est strictement croissante, et ne peut pas être périodique. On a :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \ln 1 = 0,$$

puisque $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$. De plus, $\lim_{x\to-1^-} \frac{x+1}{x-1} = 0$, ce qui implique $\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$. Enfin, $\lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \infty$, ce qui donne $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \infty$. Ainsi on a des asymptôtes verticales $x = -1$ et $x = +1$ en ± 1, et des asymptôtes horizontales $y = 0$ en $\pm\infty$. Ce qui donne la table de variations suivante :

x	$-\infty$		-1		1		∞
f'		$-$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$-$	
f	0	$\searrow$	$-\infty$	$\vert$	∞	$\searrow$	0



Exercice 4 :

1. (Question de cours) Énoncer la propriété d'Archimède pour $\mathbb{R}$.
2. Montrer la propriété d'Archimède pour $\mathbb{R}$ est équivalent au principe suivant :
   — Pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $|x| < \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^{\times}$, alors $x = 0$.

Solution :

1. La propriété d'Archimède pour $\mathbb{R}$ est le suivant :
   — Pour tout $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$ il y a $n \in \mathbb{N}$ avec $nx \geq y$.
2. Supposons la propriété d'Archimède pour $\mathbb{R}$, et soit $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| < \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^{\times}$. Supposons pour une contradiction que $x \neq 0$. Alors $|x| > 0$, et par la propriété d'Archimède il y a $n \in \mathbb{N}$ avec $n\,|x| \geq 1$. Donc $|x| \geq \frac{1}{n}$, une contradiction.
   Réciproquement, supposons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $|x| \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^{\times}$ alors $x = 0$. Soit $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$. Alors $\frac{x}{|y|+1} > 0$, ce qui par contraposée implique qu'il y a $n \in \mathbb{N}^{\times}$ tel que $|\frac{x}{|y|+1}| \geq \frac{1}{n}$. Alors $nx = n\,|x| \geq |y| + 1 \geq y$. Ainsi $\mathbb{R}$ a la propriété d'Archimède.

Exercice 5 : Soit $f : X \to Y$ une application.

1. Montrer pour tout $A, B \subseteq X$ on a $f[A \cap B] \subseteq f[A] \cap f[B]$.
2. Montrer que si f est injective, alors on a égalité.
3. Montrer que si f n'est pas injective, il y a $A, B \subseteq X$ tel que $f[A \cap B] \neq f[A] \cap f[B]$.

Solution :

1. Soit $y \in f[A \cap B]$. Il y a donc $x \in A \cap B$ avec $f(x) = y$. Alors $x \in A$ et $x \in B$, ce qui implique que $y = f(x) \in f[A]$ et $y = f(x) \in f[B]$. Ainsi $y \in f[A] \cap f[B]$, ce qui montre l'inclusion.
2. Soit f injective, et considérons $y \in f[A] \cap f[B]$. Alors $y \in f[A]$ et il y a $x \in A$ avec $f(x) = y$, et $y \in f[B]$ et il y a $x' \in B$ avec $f(x') = y$. En particulier $f(x) = f(x')$; par injectivité on a $x = x'$. Donc $x \in A \cap B$, et $y = f(x) \in f[A \cap B]$.
3. Si f n'est pas injective, il y a $x \neq x'$ dans X avec $f(x) = f(x') = y$. On pose $A = \{x\}$ et $B = \{x'\}$. Alors $f[A] = \{y\} = f[B]$ et $f[A] \cap f[B] = \{y\}$. Mais $A \cap B = \emptyset$, et $f[A \cap B] = f[\emptyset] = \emptyset \neq \{y\}$.