Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2021-2022
Cursus préparatoire : Fondamentaux des Mathématiques 1 29 septembre 2021

Devoir surveillé N°1
Durée : 1h30
Corrigé

Exercice 1
Introduisons la fonction f définie par :

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & -2+\sqrt{3+e^t} \end{array}$$

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]\sqrt{3}-2,+\infty[$.
5. Justifier que pour tout $t\in\mathbb{R}$, $4+2f(t)>0$ et que,
$$f'(t)=\frac{f(t)^2+4f(t)+1}{4+2f(t)}.$$
6. On définit g la bijection réciproque de f.
Justifier que g est dérivable sur $]\sqrt{3}-2,+\infty[$ et montrer que pour tout $t\in]\sqrt{3}-2,+\infty[$, $g'(t)=\frac{4+2t}{1+4t+t^2}$.
(Indication : on pourra s'aider de la question 5. pour calculer la dérivée.)

Solutions :

1. La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$. De plus pour tout $t\in\mathbb{R}$, $3+e^t\geqslant 0$. Donc f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. On sait que $\lim\limits_{t\to+\infty} e^t=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$. Donc par composition des limites $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=+\infty$.
De plus $\lim\limits_{t\to-\infty} e^t=0$. Donc par contuinuité de la racine carrée en 3, $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t)=-2+\sqrt{3}$.
3. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, $f'(t)=\frac{e^t}{2\sqrt{3+e^t}}$. Donc pour tout $t\in\mathbb{R}$, $f'(t)>0$. On en déduit que f est strictement croissante. On a donc le tableau de variations suivant :

t	-∞		$+\infty$
$f(t)$			$+\infty$
		$\nearrow$	
	$\sqrt{3}-2$		

4. D'après la question 3., f est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. De plus f est continue. Enfin $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t)=-2+\sqrt{3}$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=+\infty$. Donc pour tout $y\in]-2+\sqrt{3},+\infty[$, d'après le théorème de la bijection il existe un unique $t\in\mathbb{R}$ tel que $f(t)=y$. DOnc f est bijective.

5. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note que $4 + 2f(t) = 4 + 2(-2 + \sqrt{3 + e^t}) = 2\sqrt{3 + e^t} > 0$.
Soit $t \in \mathbb{R}$. On note que

$$\begin{aligned} f(t)^2 + 4f(t) + 1 \quad &= \left(-2 + \sqrt{3 + e^t}\right)^2 + 4 \times \left(-2 + \sqrt{3 + e^t}\right) + 1 \\ &= 4 + 3 + e^t - 4\sqrt{3 + e^t} - 8 + 4\sqrt{3 + e^t} + 1 \\ &= e^t \end{aligned}$$

Par conséquent pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\frac{f(t)^2+4f(t)+1}{4+2f(t)} = \frac{e^t}{2\sqrt{3+e^t}}$. On reconnait bien la dérivée de f calculée dans la question 3.

6. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-2+\sqrt{3}, +\infty[$. De plus pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = \frac{e^t}{2\sqrt{3+e^t}} \neq 0$. Nous insistons sur le fait que cette hypothèse est très importante ! Elle a été oubliée dans la totalité des copies !
Donc la bijection réciproque de f, c'est à dire g, est dérivable sur $]-2+\sqrt{3}, +\infty[$.
De plus pour tout $y \in]-2+\sqrt{3}, +\infty[$, $g'(y) = \frac{1}{f' \circ g(y)}$.
Donc d'après la question 5. pour tout $y \in]-2+\sqrt{3}, +\infty[$,

$$g'(y) \quad = \frac{4 + 2f(g(y))}{f(g(y))^2 + 4f(g(y)) + 1} = \frac{4 + 2y}{1 + 4y + 4y^2}$$

Exercice 2

Lorsque un raisonnement logique spécifique est demandé, veuillez rédiger votre preuve en conséquence. Un autre raisonnement logique sera refusé.

1. Montrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $10^n - (-1)^n$ est divisible par 11.
3. Résoudre l'équation $\exp(x^4 - 2x^2 + 1) = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Solutions :

1. Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel. Alors il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux. Donc $2q^2 = p^2$. Donc p^2 est pair donc p est pair. Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2k$. Par conséquent $2q^2 = (2k)^2$ Donc $q^2 = 2k^2$. Ainsi q^2 est pair donc q est pair. Donc p et q sont tous les deux pairs. Or ils sont premiers entre eux. Cela est absurde.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose H_n=" $10^n - (-1)^n$ est divisible par 11".
Initialisation : $10^0 - (-1)^0 = 1 - 1 = 0$ est bien divisible par 11. Donc H_0 est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n soit vraie.
On remarque que $10^{n+1} - (-1)^{n+1} = 10 \times 10^n + (-1)^n$.
On en déduit que $10^{n+1} - (-1)^{n+1} = (11-1) \times 10^n + (-1)^n = 11 \times 10^n - (10^n - (-1)^n)$.
Or par hypothèse de récurrence, $(10^n - (-1)^n)$ est divisible par 11. De plus 11×10^n est bien sûr divisible par 11. Donc finalement $10^{n+1} - (-1)^{n+1}$ est divisible par 11.
Donc H_{n+1} est vraie.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est vraie.
3. Raisonnons par équivalence.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \exp(x^4 - 2x^2 + 1) = 1 \quad &\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \{-1, 1\} \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\{-1, 1\}$.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par calculer, on entendra "donner une formule sans symbole de sommation".
On rappelle que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1. Dans cette question seulement, on suppose $n \geqslant 5$.
   Calculer $\sum_{k=5}^{n} k$.
2. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$
3. Calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.
   (Indication : On pourra remarquer que $\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$.)
4. Calculer $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} \frac{j^2}{i}$. (Indication : on pourra changer l'ordre de sommation.)

Solutions :

1. En réindiçant, $\sum_{k=5}^{n} k = \sum_{k=1}^{n-4} (k+4) = \frac{(n-4)(n-3)}{2} + 4(n-4) = \frac{(n-4)(n+5)}{2}$.
2. Par la formule du binome de Newton, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} = (1+2)^n = 3^n$.
3. En utilisant l'indication $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right)$.
   Par télescopage, on obtient que
   $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$.
4. $$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} \frac{j^2}{i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \frac{j^2}{i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \times \frac{i(i+1)(2i+1)}{6} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(i+1)(2i+1)}{6}.$$
   Par conséquent, en développant il vient,
   $$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} \frac{j^2}{i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i^2}{3} + \frac{i}{2} + \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n}{6}.$$

Exercice 4

Pour tout $x \in]0,1[$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$ et $v_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1}$.

1. Question de cours : Pour tout $x \in]0,1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $u_n(x)$.
2. Pour tout $x \in]0,1[$, calculer $\lim_{n \to +\infty} u_n(x)$.
3. Pour tout $x \in]0,1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$v_n(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

4. Pour tout $x \in]0,1[$, calculer $\lim_{n \to +\infty} v_n(x)$.

Solutions :

1. Comme $x \neq 1$, on sait que $u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$. Cette formule est cruciale ! ! ! Vous devez la savoir. Nous avons pourtant vu de nombreuses formules alternatives et folkloriques lors de la correction.
2. Comme $x \in]0,1[$, $\lim_{n \to +\infty} x^{n+1} = 0$. Donc pour tout $x \in]0,1[$, $\lim_{n \to +\infty} u_n(x) = \frac{1}{1-x}$ en passant à la limite dans l'expression obtenue dans la question 1.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. v_n est obtenue par dérivation de u_n par rapport à la variable x. Or par la question 1), pour tout $x \in]0,1[$, $u_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.
   Par conséquent, pour tout $x \in]0,1[$, $v_n(x) = \dfrac{-(n+1)x^n(1-x) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}$.
4. Comme $x \in]0,1[$, $\lim_{n \to +\infty} (n+1)x^{n+1} = 0$ par croissance comparée.
   Donc pour tout $x \in]0,1[$, $\lim_{n \to +\infty} v_n(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ en passant à la limite dans l'expression obtenue dans la question 2.

Remarque : Finalement dans l'exercice 4, on a montré que pour tout $x \in]0,1[$, $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \dfrac{1}{1-x}$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} kx^{k-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$. Formellement, on a dérivé dans la somme infinie. Vous verrez en deuxième année comment justifier ce genre de choses dans un cadre général grâce à la théorie des séries entières.