Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2021-2022
Cursus préparatoire : Fondamentaux des Mathématiques 1 29 septembre 2021

Devoir surveillé N°1
Durée : 1h30

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la conclusion de la rédaction. On veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si on repère ce qui semble être une erreur d'énoncé, on le signalera sur sa copie et on poursuivra la composition, en expliquant les raisons de cette initiative.
Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. Au cours d'un exercice, lorsqu'on ne peut pas répondre à une question, il est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat que la question demandait de démontrer.
Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Exercice 1
Introduisons la fonction f définie par :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & -2+\sqrt{3+e^t} \end{array}$$

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]\sqrt{3}-2,+\infty[$.
5. Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $4+2f(t)>0$ et que,
$$f'(t)=\frac{f(t)^2+4f(t)+1}{4+2f(t)}.$$
6. On définit g la bijection réciproque de f.
Justifier que g est dérivable sur $]\sqrt{3}-2,+\infty[$ et montrer que pour tout $t \in]\sqrt{3}-2,+\infty[$, $g'(t)=\frac{4+2t}{1+4t+t^2}$.
(Indication : on pourra s'aider de la question 5. pour calculer la dérivée.)

Exercice 2
Lorsque un raisonnement logique spécifique est demandé, veuillez rédiger votre preuve en conséquence. Un autre raisonnement logique sera refusé.
1. Montrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $10^n-(-1)^n$ est divisible par 11.
3. Résoudre l'équation $\exp(x^4-2x^2+1)=1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Ne pas oublier de tourner la page !

Exercice 3
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par calculer, on entendra "donner une formule sans symbole de sommation".
On rappelle que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1. Dans cette question seulement, on suppose $n \geqslant 5$.
   Calculer $\sum_{k=5}^{n} k$.
2. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$
3. Calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.
   (Indication : On pourra remarquer que $\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$.)
4. Calculer $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} \frac{j^2}{i}$. (Indication : on pourra changer l'ordre de sommation.)

Exercice 4
Pour tout $x \in]0,1[$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$ et $v_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.

1. Question de cours : Pour tout $x \in]0,1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $u_n(x)$.
2. Pour tout $x \in]0,1[$, calculer $\lim_{n \to +\infty} u_n(x)$.
3. Pour tout $x \in]0,1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que
$$v_n(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}.$$
4. Pour tout $x \in]0,1[$, calculer $\lim_{n \to +\infty} v_n(x)$.